Prinzipien einer Standard Analysis
$\mathbf{e}\,\mathbb{H}$
α version

Michael Pfender[1]

July 1, 2014

[1]michael.pfender@alumni.tu-berlin.de

Abstract

We introduce formally small entities such as ε, dx, dy etc. as non-zero null sequences of rational numbers. All rational sequences form an extended domain $\mathbb{R}$ of *real numbers,* extended by *small, big* and non-convergent numbers. Differenzials are introduced as small differences, integrals as infinite sums over small parts. This is to give a formal background to notions and some basic theorems of real analysis before the 19th century.

In a second part an attempt is made to a Quaternion Analysis based on the above principles of a formalised *standard real analysis.* We continue with an Analysis of a 12-dimensional Vektoralgebra obtained from the algebra of quaternion quaternions by quotient formation and shrinking 2 dimensions to smallness. It is hoped that this analysis could be usefull for geometry and for mathematical physics.

Contents

Einleitung: Die Frage $0.999\ldots = 1$?

Im Jahr 2003 problematisiert eine Schülerin in den Miteilungen der DMV:

0.9, 0.99, 0.999, … *wird doch nie wirklich* 1 – dieses Rundungsproblem begegnet wohl jedem aufgeweckten Gymnasiasten.

Eine nachfolgenden Ausgabe enthielt die folgende Lösung eines Lehrers:

Bilde das arithmetische Mittel

$$(1.0 + 0.999\ldots) : 2 = (1.999\ldots) : 2 = 0.999\ldots$$

Zwei Zahlen, deren arithmetisches Mittel mit einer der beiden übereinstimmt, sind gleich. Also

$$0.999\ldots = 1.0$$

Kritik dieses Argumentes des Lehrers im Rahmen rationaler Folgen und Reihen:
Das arithmetische Mittel der beiden Reihen ist

$$\begin{aligned} \text{mittel} &= 1/2\ (1.0 + 0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots) \\ &= (0.5 + 0.45 + 0.045 + 0.0045 + \ldots) \\ &= (0.95 + 0.045 + 0.0045 + \ldots), \end{aligned}$$

als Folgen geschrieben:

$$\begin{aligned} 0.999\ldots &= (1 - 1/10,\ 1 - 1/100,\ 1 - 1/1000,\ \ldots), \\ \text{mittel} &= (1 - 1/20,\ 1 - 1/200,\ 1 - 1/2000,\ \ldots) \end{aligned}$$

Folgendifferenz:

$$\begin{aligned} \text{mittel} - 0.999\ldots &= (1/20,\ 1/200,\ 1/2000, \ldots) \\ &= 1/2\ (0.1,\ 0.01,\ 0.001, \ldots) \end{aligned}$$

Das vom Lehrer behauptete Verschwinden der Differenz ist aber äquivalent zur von der Schülerin hinterfragten Gleichheit $0.999\ldots = 1.000\ldots$:

Die Folge $(0.1,\ 0.01,\ 0.001, \ldots)$ wird doch nie *wirklich* 0 : des Lehrers Argument ist ein Zirkel.

Die klassische, Cauchy-Dedekind Analysis löst diese Schwierigkeit brutal einfach: sie identifiziert (Cauchy-)Nullfolgen mit der rationalen 0, per **Axiom.**

Wer – wie die Schülerin – das nicht akzeptieren will, sei auf die nicht-konstruktive (Ultrafilter, Auswahlaxiom) *Non-Standard Analysis* von A. Robinson verwiesen oder – konstruktiv – auf C. Schmieden u. D. Laugwitz: *Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung,* Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 1-39 (1958).

Diese Autoren verzichten auf Körpereigenschaft (und Nullteilerfreiheit und lineare archimedische Ordnung) ihres Kontinuums und kommen leicht auf (infinitesimal) kleine Größen.

Das aus der Schulmathematik bekannte Rechnen mit kleinen Strecken dx, df, $d(f+g)$, $d(f*g)$ etc. und kleinen Dreiecken lässt sich vermutlich vollständig im Kalkül von Schmieden u. Laugwitz formalisieren. Eine solche Formalisierung – *Standard Analysis* – stellt ein interessantes Projekt zur Analysis vom höheren Standpunkt dar und soll hier in seinen Grundzügen skizziert werden, zunächst im Reellen und dann – fast mit Überspringen des komplexen Falles – für Quaternionen $\mathbb{H}$, und eine quaternionische Erweiterung von $\mathbb{H}$ um weitere, zum Teil *eingerollte* Dimensionen.

Chapter 1

Reelle Standardanalysis

1.1 Skalare Zahlbereiche

- Binärziffern $\mathbb{2} = \{0, 1\}$
- natürliche Zahlen, natürliche Zahlen mit $0 : \mathbb{N} = \mathbb{N}_0$
- natürliche Zahlen größer $0 : \mathbb{N}_> = \{n \in \mathbb{N} : n > 0\}$
- Brüche

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_\geq &= \frac{\mathbb{N}}{\mathbb{N}_>} && (1.1)\\ &= \{\frac{a}{b} \in \frac{\mathbb{N}}{\mathbb{N}_>}\}/(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc) && (1.2) \end{aligned}$$

- ganze Zahlen

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}_\geq && (1.3)\\ &\cong (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/((a, \tilde{a}) - (b, \tilde{b}) = (a + \tilde{b}, \tilde{a} + b)) && (1.4) \end{aligned}$$

- Binärzahlen

$$\begin{aligned} \mathbb{2}^+ &= \mathbb{2}^+/(0 * a = a) \quad \text{(führende Nullen)}, && (1.5)\\ & \{0, 1\}^+ = \{0, 1\}^* \setminus \{\Box\} \supset \mathbb{N} && (1.6) \end{aligned}$$

- binäre ganze Zahlen, *integers*

  $\mathbb{I} = \pm\mathbb{2}^+/(+0 = -0) \cong \mathbb{Z}$

- *fixed point binary rationals*

  $\mathbb{Q2} = \pm\mathbb{2}^*.\mathbb{2}^+$

- *floating point reals*

$$\begin{aligned} \mathbb{Q2} &= \pm\mathbb{2}^* E\mathbb{2}^+/(mE(e+1) = 2mEe) && (1.7) \\ & (\pm\text{mantissa} \cdot 2^{\text{exponent}}) && (1.8) \end{aligned}$$

1.2 Primlogarithmen

1.2.1 Exempel

$$\begin{aligned} m &= 2^{5^{3\cdot 11^{2^2}}} = p_0^{p_2^{p_1 \cdot p_4^{p_0^{p_0}}}} && (1.9) \\ &\cong (0(2(1.4(0(0)))) \cong (0(2((1)(2)(2)(0(0)))) && (1.10) \\ &\cong (0(10((1)(10)(10)(0(0)))) \in 4^* = \{0, 1, (,)\}^* && (1.11) \\ &\cong \{\text{rot}, \text{gruen}, \text{blau}, \text{gelb}\}^* && (1.12) \\ &\cong \text{Farbspiralen} && (1.13) \end{aligned}$$

Das könnte sich eignen für SuperKrypto: Potenzprodukte von großen Primzahlen (EUKLID) statt nur Produkte von 2 großen Primzahlen. Symmetrische Schlüssel, *unter Mathematikern* – und Euklidisch programmierten Computern. Codierung mit 4 Ziffern/Farben, vgl. DNS in $\Im\mathbb{H} \subset \mathbb{H}$ unten.

Jede Zahl ist ein Code – ergaenze leading bzw. trailing brackets zum Ausbalanzieren. Codieren ist leicht, mit Euklidischer Tabelle von hinreichenden Anfangsstuecken der Folge "aller" Primzahlen, dekodieren extrem schwer: Zerlegung in ein/das zugehörige Produkt von prime powers.

Schlüssel: systematische subsequence von

$$(n) = (0, 1, 2, \ldots) \cong (p_0, p_1, \ldots p_n, \ldots).$$

Der Code des Systems kann auf zeitlich und/oder raeumlich unabhaengigem Wege kommuniziert werden etc. auch an ganze communities.

1.3 Nullfolgen als kleine Zahlen

Eine Grundidee der Analysis ist es, Folgen und Reihen wie

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= (1/1, 1/2, 1/3, \ldots), \\
\pi &= 4\,(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots), \\
e^7 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} = (1 + 7 + \frac{7^2}{2} + \frac{7^3}{3!} + \ldots)
\end{aligned}$$

als *Zahlen* aufzufassen, als *reelle Zahlen.*

Addition, Negative und Multiplikation von Folgen werden komponentenweise erklärt durch

$$\begin{aligned}
a + b &= (a_n) + (b_n) = (a_0, \ldots, a_n, \ldots) + (b_0, \ldots, b_n, \ldots) = (a_n + b_n), \\
-a &= -(a_n) = (-a_n), \\
ab &= a \cdot b = (a_n) \cdot (b_n) = (a_n b_n).
\end{aligned}$$

Rationale Zahlen werden isomorph eingebettet durch

$$\mathbb{Q} \ni q \mapsto (q, q, q, \ldots).$$

Unter diesen Zahlen gibt es *Nullteiler,* z.B.

$$(1, 0, 1, 0, \ldots) \cdot (0, 1, 0, 1, \ldots) = 0 = (0, 0, 0, \ldots).$$

Die (Cauchy-)Nullfolgen ε und $\pm\varepsilon = (1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, \ldots)$ sind Nicht-Nullteiler, man kann durch sie (komponentenweise) dividieren. Allerdings ergibt die Division endlich grosser Zahlen, z.B. von rationalen Zahlen $a > 0$, durch solche non-zero Nullfolgen (betragsmäßig) unendlich große "reelle" Zahlen.

Die komponentenweise definierte *Ordnung* $a \leq b$, $a < b$ ist nicht linear, nicht archimedisch, Trichotomie gilt nicht, siehe Schmieden u. Laugwitz.

Neben der komponentenweise definierten Gleichheit $a = b$ auf diesen *standard reellen* Zahlen führen wir eine *approximative* Gleichheit $a \approx b$ ein durch

$$a \approx b \iff (a - b) = (a_n - b_n) \ll 1,$$

$a - b$ *klein,* betragsmäßig klein gegen 1, eine Nullfolge.

Eingeschränkt auf Cauchy-Folgen a, b ergibt dies gerade den klassischen Gleichheitsbegriff auf klassischen, 19th century reellen Zahlen.

Als Nullfolgen sollten hier genügen:

- die Folgen ε und $\pm\varepsilon$,
- Endstuecke $(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+2}, \ldots)$ von ε (und von $\pm\varepsilon$),
- Folgen a mit $|a| = (|a_n|) \leq |b|$, b Nullfolge,
- rationale Linearkombinationen von Nullfolgen.

[Wenn wir mit dieser Definition Probleme bekommen sollten, werden wir wieder alle Cauchy-Nullfolgen als Standard-Nullfolgen zulassen.]

Quadratisch konvergierende Nullfolgen sind Folgen der Form $\gamma = \alpha \cdot \beta$, $\alpha, \beta \ll 1$ Nullfolgen, geschrieben $\gamma \ll^2 1$, z. B. $\varepsilon^2 = (1, 1/4, \ldots, 1/n^2, \ldots) \ll^2 1$. Der zugehörige – *quadratisch präzise* – Gleichheitsbegriff werde mit $a \approx^2 b$ bezeichnet. Allgemein: $\approx^k$.

[*Smooth infinitesimal Analysis*[1] arbeitet mit quadratischer Präzision: Zum Ring $\mathbb{Q}$ wird ein nilpotentes Element ε adjungiert, $\varepsilon^2 = 0$.]

1.4 Differenziale und Differenziation

Unabhängige Differenziale wie z. B. dx, dt werden eingeführt als (freie Variable über) Nullfolgen. Meist sollte $dx = q \cdot (\pm\varepsilon)$ genügen, $q \in \mathbb{Q}$.

Für eine Abbildung $f = f(x) : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definiere als (Standard-) *Differenzial*

$$df = df(x, dx) = f(x + dx) - f(x).$$

f heißt *stetig* in x, wenn $df(x)$ klein, $df(x) \ll 1$.

Die Ableitung, der *Differenzialquotient* von f, wird definiert als der Standard-Quotient

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dx}(x, dx) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

f heißt *differenzierbar* in x, falls $\frac{df}{dx}(x, dx)$ unabhängig ist von der Wahl der Nullfolge dx, möglicherweise ist dieser Quotient (approximativ) gleich ∞, $-\infty$, oder $\pm\infty$.

Beispielsweise ist $f(x) = x \cdot \sin \frac{2\pi}{x}$ stetig in $x = 0$, hat dort aber verschiedene Ableitungen, je nach Wahl von $dx \ll 1$. Eine solche Ableitung konvergiert für $dx = (\frac{1}{n+a})$, $a \in \mathbb{Q}$ (Selbstähnlichkeit des Graphen von f).

Differenziationsregeln:

[1] I. Moerdijk, G. E. Reyes: *Smooth infinitesimal Analysis, 19..*

- Summenregel:

$$\begin{aligned} d(af+bg) &= adf+bdg, \\ \frac{d(af+bg)}{dx}(x,dx) &= a\frac{df}{dx}+b\frac{dg}{dx}, \end{aligned}$$

- Produktregel:

$$\begin{aligned} d(f\cdot g) &= (f\cdot g)(x+dx)-(f\cdot g)(x) \\ &= f(x+dx)\cdot g(x+dx)-f(x)\cdot g(x) \\ &= (f(x)+df(x,dx))\cdot(g(x)+dg(x,dx))-f(x)g(x) \\ &= f(x)dg(x,dx)+df(x,dx)g(x)+df(x,dx)dg(x,dx) \\ &\approx^2 f(x)dg(x,dx)+df(x,dx)g(x) \end{aligned}$$

für $dg(x,dx), df(x,dx)$ beide klein, d.h. f und g stetig in x.

Die Ableitung ergibt sich als Quotient von Differenzialen zu

$$\begin{aligned} \frac{d(f\cdot g)}{dx} &= \frac{df(x,dx)g(x)}{dx}+\frac{f(x)dg(x+dx}{dx}+\frac{df(x)dg(x)}{dx} \\ &\approx \frac{df(x,dx)}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg(x,dx)}{dx} \end{aligned}$$

für f und g stetig in x und damit $\frac{df(x)dg(x)}{dx} \ll 1$. Falls f und g differenzierbar (in x), so auch $f\cdot g$.

- Kehrwertregeln: Für $x \neq 0$

$$\begin{aligned} d\frac{1}{x} &= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{dx}{x}}-\frac{1}{x} \\ &\approx^2 \frac{1}{x}(1-\frac{dx}{x}+(\frac{dx}{x})^2-\ldots)-\frac{1}{x} \\ &\approx^2 \frac{-dx}{x^2} \end{aligned}$$

Für $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ f(x) \neq 0$, stetig in x :

$$\begin{aligned} d(\frac{1}{fx}, dx) &= \frac{1}{fx} \cdot \frac{1}{1 + \frac{df(x,dx)}{fx}} - \frac{1}{fx} \\ &\approx^2 \frac{-df(x, dx)}{f(x)^2}, \\ \frac{d\frac{1}{f}}{dx} &\approx \frac{-f'(x)}{f(x)^2} = \frac{\frac{-df(x,dx)}{dx}}{f(x)^2} \end{aligned}$$

- Kettenregel: Für $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(x, dx) &= g(f(x + dx)) - g(f(x)) \\ &= g(f(x) + df(x, dx)) - g(f(x)) \\ &= g(f(x)) + dg(f(x), df(x, dx)) - g(x) \\ &= dg(f(x), df(x, dx)). \end{aligned}$$

Dieses Differenzial ist immer wohldefiniert, hängt aber i. A. von der Wahl des unabhängigen Differenzials $dx \ll 1$ ab.

$$\begin{aligned} \frac{d(g \circ f)(x)}{dx} &= \frac{dg(f(x), df(x, dx))}{dx} \\ &= \frac{dg(f(x), \frac{df(x,dx))}{dx} dx)}{dx} \\ &= \frac{dg(f(x), df(x, dx))}{df(x, dx)} \cdot \frac{df(x, dx)}{dx} \\ &= \frac{dg(f(x), dy)}{dy} \cdot \frac{df(x, dx)}{dx} = g'(f(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

für f stetig in x und g differenzierbar in $f(x)$, sowie f nicht lokal konstant in x : $df(x, dx)$ kein Nullteiler. Für f lokal konstant in x gilt $d(g \circ f)(x, dx) = 0$ und insbesondere $(g \circ f)'(x) = 0$.

- Mit Kehrwertregel und Produktregel ergibt sich die Quotientenregel:

$$\begin{aligned} d\frac{f}{g}(x, dx) &= d(f \cdot \frac{1}{g}) \\ &= \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}. \end{aligned}$$

- Polynome:

$$\begin{aligned} d(x^{n+1}) &= (x+dx)^{n+1} - x^{n+1} \\ &= x^{n+1} + nx^n dx + (\ldots) \cdot dx^2 - x^{n+1} \\ &\approx^2 nx^n dx, \\ \frac{d(x^{n+1})}{dx} &\approx nx^n, \\ d\sum_{j=0}^{n} a_j x^j &\approx^2 \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1} dx. \end{aligned}$$

Daraus schließlich nach Quotientenregel das Differenzial einer rationalen Funktion:

$$\begin{aligned} & d\frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{j=0}^n b_j x^j} \\ \approx^2 \quad & \frac{(\sum_{i=1}^m i a_i x^{i-1}) \cdot (\sum_{j=0}^n b_j x^j) - (\sum_{i=0}^m a_i x^i) \cdot (\sum_{j=1}^n j b_j x^{j-1})}{(\sum_{j=0}^n b_j x^j)^2} dx. \end{aligned}$$

Damit steht der Differenzialkalkül für die klassische Kurvendiskussion rationaler Funktionen auf $\mathbb{Q}$ bereit.

1.5 Integration

Wir wollen hier – nach Riemann – das (bestimmte) Integral einer Abbildung f auf einem Intervall $]a,b[$ als Folge von endlichen Summen definieren:

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)dx = ([\int_a^b f(x)dx)]_n) \\ & [\int_a^b f(x)dx]_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(x+idx) + f(x+(i+1))dx}{2} dx, \\ & dx = (dx_n) = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n, \ldots) \\ & = (\frac{b-a}{n}) = (b-a, \frac{b-a}{2}, \ldots, \frac{b-a}{n}, \ldots), \end{aligned}$$

Wir nennen f *endlich integrierbar* auf $]a,b[$, auf $[a,b]$, wenn die Folge der Summen endlich ist, $(\frac{[\int_a^b f(x)dx)]_n}{n}) \ll 1$. Dies gilt insbesondere für f stetig oder stückweise stetig in $[a,b]$.

Eigenschaften:

- Linearität

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx,$$

- Additivität

$$\begin{aligned}
\int_b^a f(x)dx &= -\int_a^b f(x)dx, \\
\int_a^c f(x)dx &\approx \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx
\end{aligned}$$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

- Differenzial und Ableitung der unbestimmten Integralfunktion

$$\begin{aligned}
d\int_a^x f(\xi)d\xi &= \int_a^{x+dx} f(\xi)d\xi - \int_a^x f(\xi)d\xi \\
&= \int_x^{x+dx} f(\xi)d\xi \\
&\approx^2 f(x + dx/2)dx \\
&\approx^2 f(x)dx, \\
\frac{d\int_a^x f(\xi)d\xi}{dx} &\approx f(x)
\end{aligned}$$

für f stetig in x.

- Integralfunktion des Differenzials und der Ableitung

$$\begin{aligned}
\int_a^x df &= \lim_n [\sum_{i=0}^{n-1} (f(a+(i+1)d\xi) - f(a+id\xi))] \\
&= f(x) - f(a), \\
\int_a^x \frac{df}{d\xi} d\xi &= \lim_n [\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{df}{d\xi}(a+id\xi) + \frac{df}{d\xi}(a+(i+1)d\xi)}{2} d\xi], \\
& \quad d\xi = (x-a, \ldots, \frac{x-a}{n}, \ldots) \\
&\approx \lim_n [\sum_{i=0}^{n-1} \frac{df}{d\xi}(a+d\xi) d\xi] \qquad (\frac{df}{dx} \text{ stetig}) \\
&= \lim_n [\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a+(i+1)d\xi - f(a+idx)}{d\xi} d\xi] \\
&= f(x) - f(a) = \int_a^x df
\end{aligned}$$

Chapter 2

Intermission: Abbildungen rekursiv

Endomap-Iteration: Für eine Endomap $f = f(a) : A \to A$, insbesondere Domain A gleich $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{N}$ oder ein cartesisches Produkt aus diesen, heißt

$$\begin{aligned} f^{\S} = f^{\S}(a,n) &= f^n(a) = (f \circ \ldots f \circ f)(a) \\ &= f(\ldots f(f(a))\ldots) : A \times \mathbb{N} \to A \end{aligned}$$

die *iterierte* von f.[1]

Als *for-loop* geschrieben:

$b := a;$

<u>for</u> $i := 1$ <u>to</u> n

<u>do</u> $b := f(b)$ <u>od</u>;

$f^{\S}(a) := b.$

Primitiv-rekursive Abbildungen ergeben sich aus identischen Abbildungen und Projektionen durch (assoziative) Komposition $\circ$, der Induzierten-Bildung in das cartesische Produkt sowie die Iteration von Endomaps.

Die induzierte von zwei Abbildungen $f = f(c) : C \to A$ und $g = g(c) : C \to B$ ist die Abbildung

$$(f,g) = (f,g)(c) = (f(c), g(c)) : C \to A \times B$$

[1]Eilenberg-Elgot notation in *Recursiveness,* Academic Press 1970

mit der Eigenschaft

$$l \circ (f, g) = f,\ r \circ (f, g) = g,$$

$l : A \times B \to A$ und $r : A \times B \to B$ linke und rechte Projektion.

2.1 μ-Rekursion

Für eine Endomap $f = f(a) : A \to A$ und ein Prädikat $\chi = \chi(a) : A \to \mathbb{2}$ ist die while Operation $\mathrm{wh}[\chi|f] = \mathrm{wh}[\chi|f](a) : A \rightharpoonup A$ (als partielle Abbildung) rekursiv definiert durch

$$\mathrm{wh}[\chi|f](a) = \begin{cases} a \text{ if } \neg\chi(a), \\ \mathrm{wh}[\chi|f](fa) \text{ if } \chi(a). \end{cases}$$

Als while-loop geschrieben:

$b := a;$

$\underline{\text{while}}\ \chi(b)$

$\underline{\text{do}}\ b := f(b)\ \underline{\text{od}};$

$\mathrm{wh}[\chi|f](a) := b.$

Partialität: dieser content driven loop terminiert möglicherweise nicht für alle Argumente in A.

Für ein Prädikat

$$\varphi = \varphi(a, n) : A \times \mathbb{N} \to \mathbb{2} = \{0, 1\} = \{\text{false}, \text{true}\}$$

sei $\mu\varphi = \mu\varphi(a) : A \rightharpoonup \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mu\varphi(a) &= \min\{n : \varphi(a, n) = \text{true}\} \\ &= r \,\widehat{\circ}\, \mathrm{wh}[\neg\varphi|A \times s](a, 0) : A \to A \times \mathbb{N} \rightharpoonup A \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \end{aligned}$$

Hier ist $s = s(n) = n + 1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der successor und $\widehat{\circ}$ die Komposition von partiellen Abbildungen.

Als loop geschrieben:

$m := 0;$

$\underline{\text{while}}\ \neg\varphi(a, m)$

$\underline{\text{do}}\ m := m + 1\ \underline{\text{od}};$

$\mu\varphi(a) := m.$

Umgekehrt drückt sich die while Operation aus durch den μ-Operator:

$$\mathrm{wh}[\chi|f] = f^{\mu\{n:\neg\chi(f^n(a))\}} : A \rightharpoonup A.$$

Complexity Controlled Iteration

Die Daten einer CCI sind ein Endo $f = f(a) : A \to A$ verbunden mit einem Komplexitätsmaß $c = c(a) : A \to O$ in ein (linear geordnetes) *Ordinal,* mit Minimum $0 \in O$ und nur endlich absteigenden Ketten, Haupt-Beispiele: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit hierarchischer Ordnung

$$(n_1, n_2) < (\tilde{n}_1, \tilde{n}_2) \iff (n_1 < \tilde{n}_1) \vee (n_1 = \tilde{n}_1) \wedge (n_2 < \tilde{n}_2),$$

sowie dann die Erweiterung zum Polynom-Semiring $\mathbb{N}[\omega]$, hierarchisch geordnet: die Unbestimmte ω steht für große natürliche Zahlen.

Eine CCI $=$ CCI$[c, f](a) : A \to A$ mit Komplexitätswerten in Ordinal O ist ein while loop wh$[c > 0|f]$ mit Endo $f = f(a) : A \to A$ und absteigender Argumente-Komplexität $c = c(a) : A \to O$:

$$\begin{aligned} c(a) > 0 &\implies cf(a) < c(a), \\ c(a) = 0 &\implies f(a) = a. \end{aligned}$$

Für $O = \mathbb{N}$ erhalten wir die primitiv rekursiv Iterierten, für $O = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Abbildungen vom Ackermann-Typ (nicht mehr PR), die *Evaluation* von PR *map codes* ist eine CCI mit Komplexität in $\mathbb{N}[\omega]$.

2.2 Universum CCI

Durch Hinzunahme der iterierten maps zum cartesischen Universum erhielten wir das Universum **PR** der primitiv rekursiven Abbildungen. Wir schließen jetzt weiter ab gegen complexity controlled iteration und erhalten ein Universum **CCI** der *complexity controlled maps.*

Wir erzwingen cartesiannes von **CCI** durch das folgende **Axiom** über die Natürlichkeit der Projektionsfamilien l und r :

Für **CCI** Abbildungen $f : A \to A',\ g : B \to B'$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \\
A \times B \arrow[u, "l"] \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "r"'] \arrow[ur, phantom, "="] \arrow[dr, phantom, "="] & A' \times B' \arrow[u, "l"'] \arrow[d, "r"'] \\
B \arrow[r, "g"] & B'
\end{tikzcd}$$

Diese Natürlichkeit gilt nicht für alle partiellen Abbildungen, wohl aber für CCI's in der Mengenlehre, da wenigstens dort die CCI's total definiert sind, terminieren.

Wir reichern das Universum **CCI** noch an um Extensionen $\{a \in A : \chi(a)\}$ von Prädikaten und Quotienten A/R von Äquivalenzrelationen

$$R \rightrightarrows A.$$

Damit erhalten wir insbesondere auch konstruktive interne hom-Objekte $[A, B]$ als Quotienten von (PR aufzählbaren) Mengen von map codes, sowie Evaluation $\mathrm{ev} : [A, B]_{\mathbf{PR}} \times A \to B$ von PR map codes.

2.3 Internal hom und Quantorenlogik

Internal hom $[A, B]_{\mathbf{PR}} \subset \mathbb{N}$ ist oben eingeführt als die (prädikative) Menge aller Abbildungscodes von A nach B, versehen mit dem *internen,* inhaltlichen Gleichheitsbegriff $u \check{=} v$, und für ein Prädikat $\chi = \chi(a) : A \to \mathbb{2},\ u \in \mathbb{N}$ bedeutet

$$(\check{\forall} a \in A)\mathrm{Prov}_{\mathbf{PR}}(u, \ulcorner \chi \urcorner) :$$

$u \in \mathbb{N}$ ist ein interner **PR**-Beweis-code für die overall-Gültigkeit von χ.

Das **Soundness-Theorem** für die Theorie **PR**[2] sagt dann

$$\mathrm{Prov}_{\mathbf{PR}}(u, \ulcorner \chi \urcorner) \implies \chi(a),\ u \in \mathbb{N},\ a \in A \text{ frei},$$

mit Quantoren-Dekoration $\exists, \forall$:

$$\exists u \mathrm{Prov}_{\mathbf{PR}}(u, \ulcorner \forall a \chi(a) \urcorner) \implies \forall a \chi(a) :$$

[2] M. Pfender: Arithmetical Foundations – Excerpt, *arXiv* 1913

wenn $\forall a \chi(a)$ intern beweisbar ist, dann gilt es,

$$(\check{\forall} a \in A)\chi(a) \implies (\forall a \in A)\chi(a).$$

Die Umkehrung gehört nicht zur Sprache **PR**.

Konstruktive existentielle Quantifikation ist erklärt durch

$$(\check{\exists} a \in A)\chi(a) = \neg(\check{\forall} a A)\neg\chi(a).$$

Für ein zweistelliges Prädikat $\varphi = \varphi(a, b) : A \times B \to \mathbb{2}$ ist $(\check{\forall} b \in B)\varphi(a, b) : A \to \mathbb{2}$ erklärt durch

$$(\check{\forall} b \in B)\varphi(a, b) = \check{\exists} u \mathrm{Prov}_{\mathbf{PR}}(u, \overline{\varphi}(a)),$$

$\overline{\varphi} : A \to [B, \mathbb{2}]$ der exponentiell adjungierte zu φ,

$$\overline{\varphi}(a)(b) = \mathrm{ev}(\overline{\varphi}(a), b) = \varphi(a, b),$$

die Evaluation ev ist allerdings nicht mehr PR, sie ist nur eine (als solche terminierende) complexity controlled iteration—CCI.

Damit sind beliebig konstruktiv quantifizierte **PR**-Formeln definiert.

Chapter 3

Reelle Standard Analysis

3.1 Limites

Eine Folge

$$((a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}), \ldots, a_{m0}, a_{m1}, \ldots, a_{mn}), \ldots)$$

von Folgen $a_m = (a_{m0}, a_{m1}, \ldots, a_{mn}, \ldots)$ hat als *Limes* die Diagonalfolge

$$\begin{aligned} c = (c_n) &= \lim_n((a_m)_n) \\ &= (a_{nn}) = (a_{00}, a_{11}, \ldots, a_{nn}, \ldots), \end{aligned}$$

und allgemeiner als γ-Limes die Folge

$$\begin{aligned} &\lim_\gamma((a_m)_n) = (a_{n\gamma(n)}), \\ &\gamma = \gamma(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ monoton wachsend.} \end{aligned}$$

Der Limes heißt *wohldefiniert,* $c = \lim((a_m)_n)$, falls er unabhängig von der Wahl von γ ist, d.h. für $\gamma, \gamma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton

$$\lim_\gamma((a_m)_n) - \lim_{\gamma'}((a_m)_n) \ll 1.$$

Das bedeutet noch nicht Konvergenz. Aber Konvergenz für ein γ, z. B. für $\gamma = \mathrm{id}$ (Diagonalfolge) hat dann Konvergenz für alle γ zur Folge.

Eine *Cauchy-Folge* ist eine Folge (a_n) zusammen mit einer *Schranken*-Folge $N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon) = (N(1/1), N(1/2), \ldots, N(1/n), \ldots)$ derart dass

$$\begin{aligned} m, n > N(\varepsilon) &\implies |a_m - a_n| < \varepsilon, \ d.\ h. \\ m, n > N(1/k) &\implies |a_m - a_n| < 1/k. \end{aligned}$$

Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen, reelle Zahlen, sind ihr eigener Limes.

Cauchy-Folgen von Cauchy-Folgen haben einen wohldefinierten Limes, gegen den sie konvergieren. Teilfolgen von Cauchy-Folgen sind Cauchy-Folgen, und sie konvergieren (falls unendlich) alle gegen denselben Limes, bezüglich der approximativen Gleichheit $\approx$.

3.2 Internal hom und reelle Zahlen

Internal hom $[\mathbb{N}, A] \subset \mathbb{N}$ ist die (prädikative) Menge aller Folgen-codes über A, Abbildungs-codes von $\mathbb{N}$ nach A, versehen mit dem *internen,* inhaltlichen Gleichheitsbegriff $u \doteq v$.

$[\mathbb{N}, \mathbb{Q}]$ wird eingeschränkt auf PR Abbildungs codes $\mathbb{R} = [\mathbb{N}, \mathbb{Q}]_{\mathbf{PR}} \subset \mathbb{N}$ und weiter auf das Objekt $\mathring{\mathbb{R}} = \text{Cauchy} \subset [\mathbb{N}, \mathbb{Q}]_{\mathbf{PR}}$ der Cauchy-reellen Zahlen, diese aufgefasst als Cauchy-Folgen-codes. $\mathbb{R}$ hat als Gleichheits-Begriffe die internen code-Gleichheiten $\doteq$ und $\dot{\approx}$. Im Kontext schreiben wir $=$ statt $\doteq$ und $\approx$ statt $\dot{\approx}$.

$\langle \mathbb{R}, = \rangle$ erbt von $[\mathbb{N}, \mathbb{Q}]_{\mathbf{PR}}$ die Struktur eines (partiell) geordneten unitären kommutativen Ringes, $\langle \mathring{\mathbb{R}}, \approx \rangle$ ist der Cauchy-vollständige archimedisch geordnete Körper. Zum klassischen Körper der reellen Zahlen fehlen ihm als Zahlen die nicht-PR Folgen.

$\mathbb{R}$ hat als Zahlen rationale Zahlen aufgefaßt als konstante Folgen, endliche konvergente Folgen ($\mathring{\mathbb{R}}$), gegen ∞ oder gegen $-\infty$ oder gegen $\pm\infty$ oder gegen $\mp\infty$ konvergente Folgen, periodische Folgen oder *fuzzy* Folgen (keins von den vorigen). Diese Folgen dürfen allen Rechenoperationen unterworfen werden mit der einzigen Einschränkung, dass nicht durch Nullteiler dividiert wird, d. h. durch Folgen mit einer 0-Komponente. Dies schließt z. B. $\cot 0$ aus, nicht aber $\cot n\pi = \pm\infty$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, da diese $n\pi \notin \mathbb{Q}$.

Jede Abbildung $f = f(q) : \mathbb{Q} \to [\mathbb{N}, \mathbb{Q}]_{\mathbf{PR}}$ setzt sich fort in eine *normale* Abbildung $f = f(a) : [\mathbb{N}, \mathbb{Q}]_{\mathbf{PR}} \to [\mathbb{N}, \mathbb{Q}]_{\mathbf{PR}}$ durch

$$f(a) = (f(a_0), \ldots, f(a_n), \ldots) = f(\mathrm{ev}(a, 0), \ldots, f(ev(a, n), \ldots).$$

Auf diese Weise setzen sich stetige—auch stückweise stetige—Abbildungen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ fort zu normalen (stückweise) stetigen Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dies auch für nicht endlich konvergente Folgencodes in $[\mathbb{N}, \mathbb{Q}]_{\mathbf{PR}}$.

Desgleichen für endliche oder abzählbare Intervall-Vereinigungen von $\mathbb{Q}$ als Definitionsbereich von f.

Umgekehrt ist jede auf ganz $\mathbb{R}$ oder einem reellen Intervall definierte stetige reelle Funktion normale Fortsetzung ihrer Einschränkung auf $\mathbb{Q}$ bzw. auf den Durchschnitt des Intervalls mit $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}$ liegt (Limes-) dicht in $\mathbb{R}$.

Unter einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verstehen wir eine normale Abbildung, gegeben durch ihre Einschränkung auf $\mathbb{Q}$. Das ergibt als internes hom-Objekt $[\mathbb{R}, \mathbb{R}] \cong [\mathbb{Q}, \mathbb{R}]$, all dies im Rahmen des Universums (der cartesischen Kategorie) **CCI** der *complexity controlled iterations,* vgl. Pfender 2013.

Infinitesimaler Differenzial- und Integralkalkül oben übertragen sich auf $\mathbb{R}$ und cartesische Produkte (insbesondere mit sich selbst, mit $\mathbb{N}$ und mit $\mathbb{Q}$).

3.3 Zwischenwertsatz

Sei $f = f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ normal und stetig, und $f(a) < 0,\ f(b) > 0$,

$a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$,
$b = (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) \in [\mathbb{N}, \mathbb{Q}]_{\mathbf{PR}} \subseteq \mathbb{R}$,
$a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_0$ alle n
(Intervallschachtelung à la Dedekind);
$f(x)$ habe die Form
$f(x) = (fx_0, fx_1, \ldots, fx_n, \ldots) \in \mathbb{R}$.

Konstruiere eine reelle Nullstelle $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ wie folgt primitiv rekursiv:

$\delta_0 := 1; \delta_1 := 1;$
$\alpha_0 := a_0;\ \beta_0 := b_0;$
<u>if</u> $f(\alpha_0) \geq 0$ <u>then</u> $\beta_1 := \alpha_0$
<u>else</u> $\alpha_1 := \alpha_0;$

> <u>for</u> $n := 1$ <u>to</u> ∞ <u>do</u>
> $c_n := (\alpha_n + \beta_n)/2;$
>   <u>if</u> $|fc_n| < \delta_n$
>   <u>then</u> $\delta_{n+1} := \delta_n/2;\ \alpha_{n+1} := \alpha_n;\ \beta_{n+1} := \beta_n$
>   <u>else</u> $\delta_{n+1} := \delta_n;$
>   <u>if</u> $fc_n \geq \delta_n$
>   <u>then</u> $\alpha_{n+1} := \alpha_n,\ \beta_{n+1} := c_n;$
>   <u>if</u> $fc_n \leq -\delta_n$
>   <u>then</u> $\alpha_{n+1} := c_n,\ \beta_{n+1} := \beta_n;$
> <u>od</u>.
> <u>result</u> $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots) \in [a, b]$.

$f(c) = (fc_0, fc_1, \ldots, fc_n, \ldots) \approx 0$, da f stetig, detaillierter **Beweis** als **Exercise.**

3.4 Der Satz von Rolle

Für $f = f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \approx 0 \approx f(b)$ untersuchen wir das Differenzial df und die Ableitung $\frac{df}{dx}$ auf $]a, b[$. Für ein soches f gilt:

(i) Falls f auf ganz $[a, b]$ stetig differenzierbar ist, $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, dann findet man (konstruktiv) mindestens ein Argument $x_0 \in]a, b[$, in welchem f eine waagerechte Tangente hat:

$$df(x_0, dx) \approx^2 0,\ 0 < |dx| \ll 1 \text{ beliebig},$$

(und dort gibt es nur eine Tangente wegen $f \in C^1$.)

(ii) etwas allgemeiner: Falls f dort stetig und stückweise stetig differenzierbar, dann findet man (konstruktiv) mindesten einen Punkt des Graphen von f unter dessen Tangenten sich eine waagerechte findet, formal:

$$??$$

(iii) stärker: unter diesen Voraussetzungen: f stetig und $df(x, dx) \ll 1$ wenigstens stückweise (an fast allen Argumenten x), dann findet man konstruktiv mindestens ein Extremwert-Argument $x_0 \in]a, b[$.

(iv) etwas anders, gehört aber inhaltlich hierher: f stetig auf $[a, b]$ hat mindestens einen Extremwert $f(x_0)$im abgeschlossenen (und deshalb *kompakten*) Intervall $[a, b]$.

Findet man den immer *konstruktiv?*

Beweis der ersten 3 statements nach dem Zwischenwertsatz? (**Exercise**), die letzte Aussage ist klassisch der *Kompaktheitssatz.?* Bekommen wir den auch in unserem erweiterten Kontext, etwa $a \geq \infty = (n) = (1, 2, \ldots n, \ldots)$?

Chapter 4

Komplexe Analysis

4.1 Komplexe Algebra

$\mathbb{C}$ als Polynomalgebra

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \mathbb{R}[\mathbf{i}\,]/(\mathbf{i}^{\,2}+1) = \mathbb{R}[\mathbf{i}\,]/(\mathbf{i}^{\,2}=-1) \\ &= \mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R} = \{x + \mathbf{i}\,y : x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ als Matrixalgebra

$$\mathbb{C} \;\cong\; \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}, \tag{4.1}$$

mit Matrix-Multiplikation $\circ$ (Komposition der linearen Abbildungen),

$$\mathbb{C} \;\cong\; \{r \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} : t, r \in \mathbb{R}\}/ \tag{4.2}$$

$$(-r \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(t+\pi) & -\sin(t+\pi) \\ \sin(t+\pi) & \cos(t+\pi) \end{bmatrix}) \tag{4.3}$$

Polarkoordinaten, Drehstreckungen.

In fact

$$\begin{bmatrix}\cos(t+\tau) & -\sin(t+\tau)\\ \sin(t+\tau) & \cos(t+\tau)\end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos t\cos\tau - \sin t\sin\tau & -\sin t\cos\tau - \cos t\sin\tau\\ \sin t\cos\tau + \cos t\sin\tau & \cos t\cos\tau - \sin t\sin\tau\end{bmatrix} \tag{4.5}$$

nach den (geometrischen) Additionstheoremen für sin und cos, insbesondere

$$r\begin{bmatrix}\cos(t+\pi) & -\sin(t+\pi)\\ \sin(t+\pi) & \cos(t+\pi)\end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$= r\begin{bmatrix}\cos t\cos\pi - \sin t\sin\pi & -\sin t\cos\pi - \cos t\sin\pi\\ \sin t\cos\pi + \cos t\sin\pi & \cos t\cos\pi - \sin t\sin\pi\end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$= r\begin{bmatrix}-\cos t & \sin t\\ -\sin t & -\cos t\end{bmatrix} = -r\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix} \tag{4.8}$$

4.1.1 Eulerformel

Theorem:

- $e^{\mathbf{i}\,t} \approx \cos t + \mathbf{i}\,\sin t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

  Insbesondere

- Euler Mantra $e^{\pm\mathbf{i}\,\pi} \approx -1$.

  Versammelt die wichtigsten Konstanten der Mathematik in *einer* Gleichung.

Beweis durch *infinitesimale Induktion nach* $t \in \mathbb{R}$:
Verankerung an $t = 0 : e^{\mathbf{i}\,0} = 1 = cos 0 + \mathbf{i}\,\sin 0$ (geometrisch) klar.
Infitesimalschritt von t **nach** $t + dt$:

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{i}\,(t+dt)} &= e^{\mathbf{i}\,t}e^{\mathbf{i}\,dt} && (4.9)\\
&\approx (\cos t + \mathbf{i}\,\sin t)e^{\mathbf{i}\,dt} && (4.10)\\
&\qquad \text{nach Induktionsannahme} && (4.11)\\
&= (\cos t + \mathbf{i}\,\sin t)(1 + \mathbf{i}\,dt + dt^2(\ldots)) && (4.12)\\
&\approx (\cos t + \mathbf{i}\,\sin t)(\cos dt + \mathbf{i}\,\sin dt) && (4.13)\\
&\qquad \text{(geometrische Überlegung, Zeichnung)} && (4.14)\\
&= \cos t\cos dt - \sin t\sin dt + \mathbf{i}\,(\cos t\sin dt + \sin t\cos dt) && (4.15)\\
&= \cos(t + dt) + \mathbf{i}\,\sin(t + dt) && (4.16)
\end{aligned}$$

nach (geometrischem) Additionstheorem **q. e. d.**

Korollar:

- $\cos t = \Re e^{\mathbf{i}\, t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{(2n)!}$
- $\sin t = \Im e^{\mathbf{i}\, t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{t^n}{(2n+1)!}$

4.2 Komplexes Differenzial

Eine (normale) Abbildung $f = f(z) = f(x + \mathbf{i}\, y) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist *stetig* in z, falls für jede komplex-konvergente PR-Folge $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$

$$\begin{aligned} & f(\lim(u_0, \ldots, u_n, \ldots)) \approx \lim(f u_0, \ldots, f u_n, \ldots), \\ & \text{kurz: } f(z + dz) \approx f(z). \end{aligned}$$

Das totale Differenzial einer normalen Abbildung $f = f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} df &= df(z, dz) = f(z + dz) - f(z) \\ &= f((x + dx) + \mathbf{i}\,(y + dy)) - f(x + \mathbf{i}\, y). \end{aligned}$$

Die Funktion f ist *komplex differenzierbar* in $z \in \mathbb{C}$, falls ihre Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{df(z, dz)}{dz} &= \frac{f(z + dz) - f(z)}{dz} \\ &= \frac{f((x + dx) + \mathbf{i}\,(y + dy)) - f(x + \mathbf{i}\, y)}{dz} \end{aligned}$$

(dort) unabhängig ist von der Wahl der non-zero Nullfolge $dz = dx + \mathbf{i}\, dy \ll 1$, das heißt unabhängig von der Wahl von $dx \ll 1$ und $dy \ll 1$ in $\mathbb{R}$, auch $dz = dx$ oder $dz = \mathbf{i}\, dy$.

Insbesondere – letzte Fälle – muss gelten:

$$\begin{aligned} & \frac{f((x + dx) + \mathbf{i}\, y) - f(x + \mathbf{i}\, y)}{dx} \\ \approx\; & \frac{f(x + \mathbf{i}\,(y + dy)) - f(x + \mathbf{i}\, y)}{\mathbf{i}\, dy}. \end{aligned}$$

Das heißt für f stetig in $z = x + \mathbf{i}\, y$:

$$\begin{aligned} &\frac{f((x+dx)+\mathbf{i}\, y) - f(x+\mathbf{i}\, y)}{dx} \\ &\approx \frac{f(x+\mathbf{i}\,(y+dy)) - f(x+\mathbf{i}\, y)}{\mathbf{i}\, dy}, \text{ i. e.} \\ &\partial_x f(z) \approx -\mathbf{i}\, \partial_y f(z). \qquad (*) \end{aligned}$$

Die Funktion $f = f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R}$ läßt sich zerlegen in Realteil $u = u(x + \mathbf{i}\, y) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und Imaginärteil $v = v(x + \mathbf{i}\, y) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,

$$f(x+\mathbf{i}\, y) = u(x+\mathbf{i}\, y) + iv(x+\mathbf{i}\, y).$$

Mit dieser Zerlegung lautet $(*)$

$$\begin{aligned} &\partial_x(u(z)+\mathbf{i}\, v(z)) \approx -\mathbf{i}\, \partial_y(u(z)+\mathbf{i}\, v(z)), \text{ i. e.} \\ &\partial_x u + \mathbf{i}\, \partial_x v \approx -\mathbf{i}\, \partial_y u + \partial_y v, \text{ i. e.} \\ &u_x = \partial_x u = \partial_y v = v_y \text{ sowie } u_y = -v_x. \qquad (**) \end{aligned}$$

Das sind gerade die **Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen,** notwendige Bedingungen für die Differenzierbarkeit von $f = u + \mathbf{i}\, v$ an der Stelle $z \in \mathbb{C}$ bzw. im ganzen Definitionsbereich.

Das Differenzial 2. Ordnung von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} d^2 f &= d^2 f(z, dz) = ddf(z) \\ &= df(z+dz, dz) - df(z, dz) \\ &= f(z+2dz) - 2f(z+dz) + f(z). \end{aligned}$$

Differenziale höherer Ordnung

$$\begin{aligned} d^n f &= d^n f(z, dz) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(z, (n-k)dz) \end{aligned}$$

(Pascalsches Dreieck).

In Termen von Real- und Imaginärteil $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
& d^2u(z, dz) \\
= \quad & d(u_x(z)dx + \mathbf{i}\, u_y(z)dy) \\
= \quad & (u_x(z + dx)dx + \mathbf{i}\, u_y(z + dy)dy) - (d(u_x(z)dx + \mathbf{i}\, u_y(z)dy) \\
= \quad & (u_x(z + dx) - u_x(z))dx + \mathbf{i}\,(u_y(z + dy) - u_y(z))dy, \qquad (\bullet)
\end{aligned}$$

für u_x stetig in z. Daraus folgt mit der Wahl von dx, dy so, dass $f(z)+f'(z)\frac{dx}{dy} \ll 1$, z. B. mit $dx = \varepsilon^2,\ dy = \varepsilon$

$$\begin{aligned}
u_y(z + dy) - u_y(z) &\approx 0, \\
u_{yy}(z) &\approx 0,\ \text{analog} \\
v_{xx}(z) &\approx 0.
\end{aligned}$$

Andererseits folgt aus $ddf \approx 0$ und damit $(\bullet)$

$$\begin{aligned}
0 \quad &\approx \quad u_{xx} + \mathbf{i}\, u_{yy}, \quad \text{analog} \\
0 \quad &\approx \quad v_{yy} + \mathbf{i}\, v_{xx}, \\
0 \quad &\approx \quad u_{xx} + v_{yy} + \mathbf{i}\,(u_{yy} + v_{xx}),
\end{aligned}$$

also **Theorem** (Laplace):

$$\begin{aligned}
&\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \approx 0, \\
&\Delta v = v_{xx} + v_{yy} \approx 0, \\
&u_{yx} \approx u_{xy} \approx 0 \approx v_{yx} \approx v_{xy}.
\end{aligned}$$

Sind diese (approximative) Gleichungen auch hinreichend für die vollständige Differenzierbarkeit von $f = u + \mathbf{i}\, v$ in z, in einer Umgebung von z?

Folgt aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit und die n-fache Differenzierbarkeit für alle n?

4.3 Potenzreihenentwicklung

$$\begin{aligned}
f(z+dz) &= f(z)+df(z,dz) = f(z)+\frac{df(z)}{dz}dz = f(z)+f'(z)dz,\\
f(z+2dz) &= f(z)+f'(z)dz+f'(z+dz)dz\\
&= f(z)+f'(z)dz+(f'(z)+f''(z)dz)dz\\
&= f(z)+2f'(z)dz+f''(z)dz^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(z+3dz) &= f(z)+f'(z)dz+f'(z+dz)dz+f'(z+2dz)dz\\
&= f(z)+2f'(z)dz+f''(z)dz^2\\
&\quad +(f'(z)+2f''(z)dz+f^{(3)}(z)dz^2)dz\\
&= f(z)+3f'(z)dz+3f''(z)dz^2+f^{(3)}(z)dz^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(z+4dz) &= f(z)+4f'(z)dz+6f''(z)dz^2+4f^{(3)}(z)dz^3+f^{(4)}(z)dz^4\\
&= \sum_{n=0}^{4}\binom{4}{n}f^{(n)}(z)dz^n,\\
f(z+mdz) &= \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}f^{(n)}(z)dz^n.
\end{aligned}$$

Beweis durch Induktion nach m : Pascalsches Dreieck.

$$\begin{aligned}
&f(z+(m+1)dz)\\
=\ & f(z)+\sum_{n=1}^{m-1}mf^{(n)}(z)dz^n+f^{(m)}(z)dz^m\\
&+(f'(z)+\sum_{n=1}^{m-1}mf^{(n+1)}(z)dz^n+f^{(m+1)}(z)dz^m)dz\\
=\ & f(z)+\sum_{n=1}^{m}(m+1)f^{(n)}(z)dz^n+f^{(m+1)}(z)dz^{m+1}
\end{aligned}$$

Nun betrachte die letzte Gleichung für ein $z := z_0$, ein neues z, und die non-zero Nullfolge

$$dz = (z-z_0)\varepsilon = (z-z_0)(1,1/2,\ldots,1/m,\ldots).$$

Dafür gilt

$$\begin{aligned}
f(z) &= (f(z_0 + mdz)) = (\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} f^{(n)}(z_0) dz^n) \\
&= (\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} f^{(n)}(z_0) \frac{(z-z_0)^n}{m^n}) \\
&= (\sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!} f^{(n)}(z_0) \frac{(z-z_0)^n}{m^n}) \\
&= (\sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{m^n (m-n)!} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n) \\
&\approx (\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n),
\end{aligned}$$

unter der Voraussetzung $n \ll m$ d. h. $\frac{n}{m} \ll 1$ bei $m, n \to \infty$.

Potenzreihen allgemein sind von der Form

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \lim_n \sum_{j=0}^{n} a_j z^j : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\
& \quad a = a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \text{ es genügt } a = a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \times \mathbf{i}\,\mathbb{Q} \text{ PR}, \\
f(z) &: \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty \text{ normale Foretsetzung von} \\
f(z) &: \mathbb{Q} + \mathbf{i}\,\mathbb{Q} \to \mathbb{C}_\infty.
\end{aligned}$$

Das Differenzial ist

$$df = df(z, dz) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} dz \ll 1$$

nur im Innern (und auf Teilen des Randes) vom Konvergenzkreis von f,

$$K_\rho = \{z : |z| < \rho\}, \ \rho = \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Die Ableitung ist dann

$$\frac{df}{dz}(dz) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_j z^{n-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

außerhalb von $K_{<\rho}$ möglicherweise abhängig von der Wahl von $dz \ll 1$, dort dann nicht differenzierbar.

4.4 Kurven und Tangenten

Eine Kurve (in $\mathbb{C}$) ist eine normale Abbildung $c = c(t) : [0,1] \to \mathbb{C} = \mathbb{C}_\infty$, Fortsetzung von $c = c(t) : [0,1]_\mathbb{Q} = [0,1] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$. Sie heißt *geschlossen* falls $c(0) = c(1)$, d. h. c ist eine normale Abbildung

$$c = c(\omega\tau) : \omega S^1 = \{e^{\mathbf{i}\,\omega\,t} : t \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{C},\ \omega = \frac{1}{2\pi},\ \omega\tau \in [0,1].$$

Besonders interessant sind stetige Kurven in der gelochten komplexen Ebene $\dot{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Auch die doppelt gelochte Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0,-1\}$ wird betrachtet (D. Ferus).

Das *Tangentendifferenzial* an c im Punkt $c(t)$ ist definiert als

$$dc(t,dt) \quad = \quad c(t+dt) - c(t),\ \text{typically } dc(t,dt) \ll 1.$$

$\dfrac{dc}{dt}(t)$ ist die Richtungssableitung an c in $c(t)$ – zur Zeit t, die Kurve darf sich (etwa) in $c(t) = c(t')$ selbst durchdringen.

Die *Tangente* and c zur Zeit t (modulo 1 für c geschlossen) ist

$$\mathrm{tg}_c(t,dt,\tau) = c(t) + \tau\frac{dc(t,dt)}{dt} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

Für c nicht differenzierbar in t braucht das keine Gerade zu sein, im Falle eines Knickes erwarten wir u. a. zwei Tangenen: $dt = \varepsilon, dt = -\varepsilon$, Oszilation für $dt = \pm\varepsilon$.

4.5 Kurvenintegrale

- **Bogenlänge**
- **Parametrisierung nach der Bogenlänge**
- **Wegintegrale**

Chapter 5

Quaternionenalgebra

Hier beginnt der tentative Teil.

5.1 Quaternionen und Matrizen

Samuel 'Sammy' EILENBERG on phone:

all what can *be known on quaternions and matrices* is *already known.*

O.K: lets see.

$$\begin{aligned}
\mathbb{H} &= \mathbb{C}[\mathbf{j}]/(\mathbf{j}^2 = -1, \mathbf{j}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{j}) \\
&= \mathbb{C} + \mathbf{j}\,\mathbb{C} \\
&= (\mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R}) + \mathbf{j}\,(\mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R}) \\
&= (\mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R}) + (\mathbf{j}\,\mathbb{R} + \mathbf{ji}\,\mathbb{R}) = \mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R} + \mathbf{k}\,\mathbb{R} \\
&= (\mathbb{R}[\mathbf{i}]/(\mathbf{i}^2 = -1))\,[\mathbf{j}]/(\mathbf{j}^2 = -1, \mathbf{j}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{j}) \\
&= (\mathbb{R}[\mathbf{j}]/(\mathbf{j}^2 = -1))\,[\mathbf{i}]/(\mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{i}\,\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\mathbf{i}) \\
&= \mathbb{R}[\mathbf{i}, \mathbf{j}]/(\mathbf{i}^2 = -1 = \mathbf{j}^2, \mathbf{j}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{j}) \\
&\cong \mathbb{R}[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]/ \\
&\quad (\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \\
&\quad \mathbf{j}\,\mathbf{i} = \mathbf{k} = -\mathbf{i}\,\mathbf{j}, \\
&\quad \mathbf{k}\,\mathbf{j} = \mathbf{i} = -\mathbf{j}\,\mathbf{k}, \\
&\quad \mathbf{i}\,\mathbf{k} = \mathbf{j} = -\mathbf{k}\,\mathbf{i}) \\
&= \mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R} + \mathbf{k}\,\mathbb{R} \\
&\cong \mathbb{R}[\mathbf{i}, \mathbf{k}]/ \\
&\quad (\mathbf{k}^2 = -1 = \mathbf{i}^2, \mathbf{i}\,\mathbf{k} = -\mathbf{k}\,\mathbf{i})
\end{aligned}$$

Die vorletzte Präsentation ist zyklisch symmetrisch in den drei Unbestimmten, räumlichen Vektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, abgesondert die (vektoriell orthogonale) skalare *Zeit*-Dimension.

Die erste Präsentation von $\mathbb{H}$ verbindet in ihrem $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathbf{i}]/(\mathbf{i}^2 = -1)$ skalare *Zeit* eng mit der (ersten) Längendimension $\mathbf{i}\,\mathbb{R}$. Diese Verbindung ist gut für *zyklische Schwingungen*

$$e^{\mathbf{i}\,t} = \cos t + \mathbf{i}\,\sin t : \mathbb{R} \to \mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R}.$$

Analog

$$e^{\mathbf{j}\,t} = \cos t + \mathbf{j}\,\sin t : \mathbb{R} \to \mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R}.$$

Zweite und dritte Präsentation nehmen $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ gleichberechtigt als aufspannende Vektoren der *horizontalen* Ebene $\mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R}$ und sondern $\mathbf{k}\,\mathbb{R} = \mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbb{R}$ als Höhen-, Gravitations-Richtung aus, alle wieder getrennt von der (skalaren) Zeit-Dimension $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$.

Die letzte Präsentation betont den Sonderstatus der dritten Raumdimension $\mathbf{k}\,\mathbb{R}$: Bei der (kanonischen) Matrixpräsentation nach der Bikomplexdarstellung

$$\mathbb{H} = (\mathbb{R}[\mathbf{i}]/(\mathbf{i}^2 = -1))\,[\mathbf{j}]/(\mathbf{j}^2 = -1, \mathbf{j}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{j})$$

sind die transponierten der Vektorraum-Basisvektoren

$$1^T = 1,\ \mathbf{i}^T = -\mathbf{i}\,,\ \mathbf{j}^T = -\mathbf{j}\,,\ \text{aber } \mathbf{k}^T = \mathbf{k}\,.$$

Das unterscheidet die Dimension $\mathbf{k}\,\mathbb{R} \perp (\mathbf{i}\,\mathbb{R}+\mathbf{j}\,\mathbb{R})$ von den horizontalen Raumdimensionen $\mathbf{i}\,\mathbb{R}$ und $\mathbf{j}\,\mathbb{R}$. Dimension $\mathbf{k}\,\mathbb{R}$ ist gut für Ausbreitung/Empfang von Licht und Gravitation, lokal an der (Erd)oberfäche.

Kanonische **Darstellungen:**

$$\begin{aligned} h &= t + \mathbf{i}\,a + \mathbf{j}\,b + \mathbf{k}\,c = (t + \mathbf{i}\,a) + (\mathbf{j}\,b + \mathbf{ji}\,c) \\ &= (t + \mathbf{i}\,a) + \mathbf{j}\,(b + \mathbf{i}\,c)\ \textit{bikomplex.} \end{aligned}$$

Aufspaltung:

$$\begin{aligned} \hat{\Re}h &= (t + \mathbf{i}\,a) = \begin{bmatrix} t & -a \\ a & t \end{bmatrix} \\ \hat{\Im}h &= (b + \mathbf{i}\,c) = \begin{bmatrix} b & -c \\ c & b \end{bmatrix} \\ h &= \hat{\Re}h + \hat{\Im}h \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\Re}h & -\hat{\Im}h \\ \hat{\Im}h & \hat{\Re}h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t & -a & -b & c \\ a & t & -c & -b \\ b & -c & t & -a \\ c & b & a & t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix-Darstellung muss wohl so aussehen, insbesondere gilt dann mit

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= \mathbf{ji} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Quaternionenvariable analog:

$$\begin{aligned}
q &= t + \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z \\
&= \begin{bmatrix} t & -x & -y & -z \\ x & t & z & -y \\ y & z & t & -x \\ -z & y & x & t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Produkt explizit, für $t = \tilde{t}$ (gleichzeitg)

$$\begin{aligned}
h \cdot \tilde{h} &= (t + \mathbf{i}\,a + \mathbf{j}\,b + \mathbf{k}\,c) \cdot (t + \mathbf{i}\,\tilde{a} + \mathbf{j}\,\tilde{b} + \mathbf{k}\,\tilde{c}) \\
&= t^2 - a\tilde{a} - b\tilde{b} - c\tilde{c} \\
&\quad + t(\mathbf{i}\,(a + \tilde{a}) + \mathbf{j}\,(b + \tilde{b}) + \mathbf{k}\,(c + \tilde{c})) \\
&\quad + \mathbf{k}\,(a\tilde{b} - \tilde{a}b) + \mathbf{i}\,(b\tilde{c} - \tilde{b}c) + \mathbf{j}\,(c\tilde{a} - \tilde{c}a)
\end{aligned}$$

i. e.

$$\begin{aligned}
h \cdot \tilde{h} &= t^2 - \langle \Im h, \Im \tilde{h} \rangle + t(\Im_{\mathbb{H}} h + \Im_{\mathbb{H}} \tilde{h}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \end{vmatrix} \\
&= t^2 - \langle \Im h, \Im \tilde{h} \rangle + t(\Im_{\mathbb{H}} h + \Im_{\mathbb{H}} \tilde{h}) + \Im h \times \Im \tilde{h}, \\
&\quad (\cdots + \text{äußeres Produkt}),
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Im h = (a, b, c) &= \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}, \\
\Im_{\mathbb{H}} h &= \mathbf{i}\,a + \mathbf{j}\,b + \mathbf{k}\,c.
\end{aligned}$$

Produkt = Matrixprodukt.

Das **transponierte Quaternion** wird definiert durch

$$\begin{aligned} h^T &= [t + \mathbf{i}\, a + \mathbf{j}\, b + \mathbf{k}\, c]^T \\ &= \begin{bmatrix} t & -a & -b & -c \\ a & t & c & -b \\ b & c & t & -a \\ -c & b & a & t \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} t & a & b & -c \\ -a & t & c & b \\ -b & c & t & a \\ -c & -b & -a & t \end{bmatrix} \\ &= t - \mathbf{i}\, a - \mathbf{j}\, b + \mathbf{k}\, c, \end{aligned}$$

noch einmal, direkt:

$$\begin{aligned} h^T &= [t + \mathbf{i}\, a + \mathbf{j}\, b + \mathbf{k}\, c]^T \\ &= [t + \mathbf{i}\, a]^T + [\mathbf{j}\, b + \mathbf{ji}\, c]^T \\ &= [t + \mathbf{i}\, a]^T + [\mathbf{j}\, (b + \mathbf{i}\, c)]^T \\ &= [t + \mathbf{i}\, a]^T - \mathbf{j}\, [b + \mathbf{i}\, c]^T \\ &= [t + \mathbf{i}\, a]^T - \mathbf{j}\, (b - \mathbf{i}\, c) \\ &= t - \mathbf{i}\, a - \mathbf{j}\, b + \mathbf{ji}\, c \\ &= t - \mathbf{i}\, a - \mathbf{j}\, b + \mathbf{k}\, c. \end{aligned}$$

Es ist nur für $c = 0$ gleich dem **konjugierten Quaternion**

$$\begin{aligned} \overline{h} &= \overline{t + \mathbf{i}\, a + \mathbf{j}\, b + \mathbf{k}\, c} = t - \mathbf{i}\, a - \mathbf{j}\, b - \mathbf{k}\, c \\ &= \begin{bmatrix} t & a & b & c \\ -a & t & -c & b \\ -b & -c & t & a \\ c & -b & -a & t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Betragsquadrat

$$|h|^2 = h\overline{h} = t^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

(Beidseitig) **Inverses** zu $h \neq 0$:

$$h^{-1} = \frac{\overline{h}}{|h|^2} = \frac{t - \mathbf{i}\, a - \mathbf{j}\, b - \mathbf{k}\, c}{|h|^2}.$$

Skalarprodukt Minkowski

$$\begin{aligned} \langle\langle q, \tilde{q} \rangle\rangle &= \langle\langle t + \mathbf{i}\, x + \mathbf{j}\, y + \mathbf{k}\, z, \tilde{t} + \mathbf{i}\, \tilde{x} + \mathbf{j}\, \tilde{y} + \mathbf{k}\, \tilde{z} \rangle\rangle \\ &= \Re(q \cdot \tilde{q}) = t\tilde{t} - (x\tilde{x} + y\tilde{y} + z\tilde{z}) : \\ & \quad \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}, \text{ “fast immer” } \to \mathbb{R}_{>}. \end{aligned}$$

Metrik

$$\begin{aligned} ||h|| &= ||t + \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z|| = \langle\langle h, h\rangle\rangle \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2,\ [1, -1, -1, -1] \text{ Minkowski-Metrik.} \end{aligned}$$

5.2 Lineare Algebra

Geraden

Eine affine **Gerade** ist dynamisch gegeben als

$$\begin{aligned} g &= g(t) = g_0 + g' \cdot t : \mathbb{R} \to \mathbb{H},\ g_0, g' \in \mathbb{H}, \\ g' &= g_1 + \mathbf{i}\,g_{\mathbf{i}} + \mathbf{j}\,g_{\mathbf{j}} + \mathbf{k}\,g_{\mathbf{k}}\,,\ g_{\mathbf{i}}\,, g_{\mathbf{j}}\,, g_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

g_0 *Aufpunkt,* g' *Richtung.*

Für $g_0, g' \in \Im_{\mathbb{H}}\mathbb{H}$ handelt es sich um eine *Raumgerade.*

Ein *Zeit-Punkt* (*time point*) $h = t + \Im h = t + \mathbf{i}\,a + \mathbf{j}\ b + \mathbf{k}\,c \in \mathbb{H}$ heißt *Schnittpunkt* der Geraden $g, \tilde{g} : \mathbb{R} \to \Im_{\mathbb{H}}\mathbb{H}$, falls $g(t) = h = \tilde{g}(t)$.

Eine **Ebene** – Ebene in $\mathbb{H}$ aufgefasst als $\mathbb{R}^4$ – ist eine affine Abbildung

$$f : \mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbf{k}\,\mathbb{R} \to \mathbb{H},$$

sie ist von der Form

$$\begin{aligned} & f = f(\tau + \mathbf{k}\,\zeta) = f_0 + f' \cdot (\tau + \mathbf{k}\,\zeta) : \mathbb{R} + \mathbf{k}\,\mathbb{R} \to \mathbb{H}, \\ & f_0,\ f' = f_1 + \mathbf{k}\,f_{\mathbf{k}} + \mathbf{i}\,f_{\mathbf{i}} + \mathbf{j}\,f_{\mathbf{j}} \in \mathbb{H}, \\ & f' \cdot (\tau + \mathbf{k}\,\zeta) = (f_1 + \mathbf{k}\,f_{\mathbf{k}} + \mathbf{i}\,f_{\mathbf{i}} + \mathbf{j}\,f_{\mathbf{j}}) \cdot (\tau + \mathbf{k}\,\zeta) \\ & = f_1\tau - f_1\zeta + \mathbf{k}\,(f_1\zeta + f_{\mathbf{k}}\,\tau) + \mathbf{i}\,(f_{\mathbf{i}}\,\tau - f_{\mathbf{j}}\,\zeta) + \mathbf{j}\,(f_{\mathbf{j}}\,\tau + f_{\mathbf{i}}\,\zeta); \\ & \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \tau, \zeta \in \mathbb{R} \text{ frei.} \end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{H} \cong R^4$ gibt es folgende Fälle für den Durchschnitt zweier Ebenen $f, \tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$:

- "Normalfall": Schnittgerade

  $$g = g(\tau) = g_0 + g'\tau = g_0 + (g_1 + g_{\mathbf{i}} + g_{\mathbf{j}} + g_{\mathbf{k}})\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$$

  mit $g_0 = f_0 = \tilde{f}_0$, sowie $g' \in \mathbb{H}$ Lösung von

  $$(f' - \tilde{f}') \cdot (\tau + \mathbf{i}\,\xi) = 0.$$

Interessanter **Spezialfall:**

$$f = f(\tau, \xi) : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$$

komplex linear, d.h. f additiv und

$$\begin{aligned} f((\tau + \mathbf{i}\,\xi) \cdot (t + \mathbf{i}\,x)) &= (\tau + \mathbf{i}\,\xi) \cdot f(t + \mathbf{i}\,x) \\ &= \tau f(t + \mathbf{i}\,x) + \mathbf{i}\,\xi f(t + \mathbf{i}\,x) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{H}, \end{aligned}$$

Komplex-Gerade durch 0, in $\mathbb{H}$ eingebettete Drehstreckung.

Chapter 6

Quaternionenanalysis

Unabhängiges Differenzial dq und Differenzial df von

$$\begin{aligned} f &= f(q) = (t + \mathbf{i}\,u(q)) + \mathbf{j}\,(v(q) + \mathbf{i}\,w(q)) \\ &= t + \mathbf{i}\,u(q) + \mathbf{j}\,v(q) + \mathbf{k}\,w(q) : \\ & \mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbf{j}\,\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R} + \mathbf{k}\,\mathbb{R} \to \mathbb{H} \\ dq &= d((t + \mathbf{i}\,x) + \mathbf{j}\,(y + \mathbf{i}\,z)) = dt + \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz. \end{aligned}$$

Konjugation und Inverses

$$\begin{aligned} \frac{1}{dq} &= \frac{\overline{dq}}{|dq|^2} \\ &= \frac{\overline{t + \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,(dy + \mathbf{i}\,dz)}}{|dq|^2} \\ &= \frac{\overline{t + \mathbf{i}\,dx} - \mathbf{j}\,dy - \mathbf{ji}\,dz}{|dq|^2} \\ &= \frac{t - \mathbf{i}\,dx - \mathbf{j}\,dy - \mathbf{k}\,dz}{|dq|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df &= df(w, dw) = f(w + dw) - f(w) \\ &= dt + \mathbf{i}\,dv_{\mathbf{i}}\,(w, dw) + \mathbf{j}\,dv_{\mathbf{j}}\,(w, dw) + \mathbf{k}\,dv_{\mathbf{k}}\,(w, dw) \\ &= dt + \mathbf{i}\,\partial_{\mathbf{i}}\,f(w)dx + \mathbf{j}\,\partial_{\mathbf{j}}\,f(w)dy + \mathbf{k}\,\partial_{\mathbf{k}}\,f(w)dz \\ &= dt + \nabla \Im_{\mathbb{H}} f(w) \text{ (Gradient).} \end{aligned}$$

Der reelle Parameter t fungiert als unabhängiger Parameter, "Zeit". Wir betrachten (zunächst) Transformationen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, welche diesen Parameter unverändert lassen. Erst Relativität transformiert auch die Zeit.

Vollständige Ableitung

$$\begin{aligned} f'(w, dw) &= \frac{df(w, dw)}{dw} \\ &= (dt + \nabla \Im_{\mathbb{H}} f(w)) \cdot (\overline{dw}/|dw|^2) : \\ &\quad \mathbb{H} \times d\mathbb{H} \to \mathbb{H} \end{aligned}$$

Das Differenzial 2. Ordnung von $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ in $w \in \mathbb{H}$ ist

$$\begin{aligned} d^2 f &= d^2 f(w, dw) = ddf(w) \\ &= df(w + dw, dw) - df(w, dw) \\ &= f(w + 2dw) - 2f(w + dw) + f(w) \\ &\ll^2 1 \text{ für } df \text{ stetig, d. h. } f \in C^1 \end{aligned}$$

Differenziale höherer Ordnung

$$\begin{aligned} d^n f &= d^n f(w, dw) \\ &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(w, (n-m)dw) \end{aligned}$$

(Pascalsches Dreieck). Die Nicht-Kommutativität der Multiplikation von $\mathbb{H}$ spielt hier keine Rolle.

$$\begin{aligned} f(w + mdw) &= f(w) + \binom{n}{1} f'(w, dw)dw \\ &\quad + \binom{n}{2} f''(w, dw)dw^2 + \ldots + f^{(m)}(w, dw)dw^m \\ &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} f^{(n)}(w, dw)dw^n. \end{aligned}$$

6.1 Formen und ihre Integrale

Produkt von Differenzialen

$$\begin{aligned}
dx \wedge dy &= \mathbf{i}\,dx\,\mathbf{j}\,dy = -\mathbf{j}\,dy\,\mathbf{i}\,dx = -dy \wedge dx \ll^2 1, \\
dy \wedge dz &= \mathbf{j}\,dy\,\mathbf{k}\,dz = -dz \wedge dy, \\
dz \wedge dx &= \mathbf{k}\,dz\,\mathbf{i}\,dx = -dx \wedge dz, \\
dx \wedge dx &= \mathbf{i}\,dx\,\mathbf{i}\,dx = -dx^2, \\
dy \wedge dy &= -dy^2, \; dz \wedge dz = -dz^2 \ll^2 1 \\
dx \wedge dy \wedge dz &= \mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}\,dxdydz = -dxdydz \ll^3 1,
\end{aligned}$$

das ist anders als im Grassmann-Kalkül: Vorzeichen; der Raum hat hier 3 imaginäre Dimensionen, $\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k} = -1$, das Volumenelement ist wie dort ein Skalar, Determinante negativ genommen.

$$\begin{aligned}
dt \wedge dx &= dt\,\mathbf{i}\,dx = \mathbf{i}\,dxdt = dx \wedge dt \\
dt \wedge dy &= dy \wedge dt, \; dt \wedge dz = dz \wedge dt,
\end{aligned}$$

kommutativ, da dt hier ein Skalar, wiederum anders als im Grassmann-Kalkül für den $\mathbb{R}^4$.

0- und 1-Formen

- $f : \{t_0, t_1\} \to \Im\mathbb{H}$ ist eine **0-Form.** $\int f = f(t_1) - f(t_0)$.

- $u(t)dt$ ist eine **1-Form,** $f = f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ Abbildung. Integral:

$$\begin{aligned}
\int f(t)u(t)dt &= \lim_{dt \to 0} \sum_0^\infty (f(ndt)u(ndt)dt + f(-ndt)u(-ndt)dt) \\
&= \lim_m \lim_{dt \to 0} \sum_{n=0}^m (f(ndt)u(t)dt + f(-ndt)u(t)dt).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{dx\to 0}\sum_0^\infty (\mathbf{i}\, f(n\mathbf{i}\, dx)dt + \mathbf{i}\, f(-n\mathbf{i}\, dx)dx) \\
&= \lim_{dx\to 0}\lim_m \sum_{n=0}^m \mathbf{i}\,(f(n\mathbf{i}\, dx)dx + f(-n\mathbf{i}\, dx)dx \\
&\quad \text{etc. für } \int f(\mathbf{j}\, y)\mathbf{j}\, dy, \ \int f(\mathbf{k}\, z)\mathbf{k}\, dz.
\end{aligned}
$$

- **2-Formen:**

$$
\begin{aligned}
&\gamma = f(x,y)dx \wedge dy = \mathbf{k}\, f(x,y)dxdy, \\
&f = f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \Im\mathbb{H}, \\
&\alpha = g(y,z)dy \wedge dz = \mathbf{i}\, g(y,z)dydz, \\
&g = f(y,z) : \mathbb{R}^2 \to \Im\mathbb{H}, \\
&\beta = h(z,x)dz \wedge dx = \mathbf{j}\, h(z,x)dzdx, \\
&h = f(z,x) : \mathbb{R}^2 \to \Im\mathbb{H}.
\end{aligned}
$$

Integral: zunächst der Spezialfall

$$f = f(x,y) = \mathbf{k}\, \tilde{f}(x,y) : \mathbb{R} \to \mathbf{k}\, \mathbb{R}$$

Hier gilt

$$
\begin{aligned}
\int \gamma &= \int \mathbf{k}\, \tilde{f}(x,y)dx \wedge dy \\
&= \int \mathbf{k}\, \tilde{f}(x,y)\mathbf{k}\, dxdy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f} dxdy \text{ klassisch.}
\end{aligned}
$$

Allgemeiner Fall:

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = \mathbf{i}\, f_{\mathbf{i}}\,(x,y) + \mathbf{j}\, f_{\mathbf{j}}\,(x,y) + \mathbf{k}\, f_{\mathbf{k}}\,(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \Im\mathbb{H}; \\
&\int \gamma = \mathbf{i}\,\mathbf{k} \int f_{\mathbf{i}}\, dxdy + \mathbf{j}\,\mathbf{k} \int f_{\mathbf{j}}\, dxdy + \mathbf{k}\,\mathbf{k} \int f_{\mathbf{k}}\, dxdy \\
&= -\mathbf{j} \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{i}}\, dxdy + \mathbf{i} \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{j}}\, dxdy - \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{k}}\, dxdy.
\end{aligned}
$$

Berechnung von $\int_{\mathbb{R}^2} q(x,y)dxdy$ mittels spiraliger infinitesimaler Ausschöpfung von $\mathbb{R}^2$:

Wir benutzen eine quadratspiralige Abzählung $\mathrm{ct} = \mathrm{ct}(n) : \mathbb{N} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}^2$, wie sie Cantor zur Abzählung von $\mathbb{Q}$ verwendet:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ct}(0) = (0,0),\\
&\mathrm{ct}(1) = (1,0),\ \mathrm{ct}(2) = (1,1),\ \mathrm{ct}(3) = (0,1),\ \mathrm{ct}(4) = (-1,1),\\
&\mathrm{ct}(5) = (-1,0),\ \mathrm{ct}(6) = (-1,-1),\ \mathrm{ct}(7) = (0,-1);\ \mathrm{ct}(8) = (1,-1);\\
&\ldots\\
&\mathrm{ct}(8n+1) = (n,0), \ldots, \mathrm{ct}((8+1)n) = (n,n), \ldots,\\
&\quad \mathrm{ct}((8+8)n) = (0,-n), \ldots
\end{aligned}$$

Wir zählen das $\frac{1}{m}$ feine $\mathbb{Q}$-Gitter durch

$$\mathrm{ct}_m(n) = \frac{\mathrm{ct}(n)}{m} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}.$$

Nun können wir **definieren:**

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} q(x,y)dxdy &= \lim_m \sum_{n=0}^{4^m m^2} q(\mathrm{ct}_m(n))dx(m)dy(m)\\
&= \lim_m \sum_{n=0}^{4^m m^2} q(\mathrm{ct}_m(n))(\frac{1}{m})^2;
\end{aligned}$$

wir haben $dx = \varepsilon = dy$ gewählt, an jedem Feingitterpunkt hängt in positiver x- und y-Richtung ein Quadrat der Seitenlänge $\frac{1}{m}$, und diese Quadrate parkettieren ein (näherungsweise) konzentrisches Quadrat der Seitenlänge $2^m m$, für jedes einzelne m separat. Wir könnten uns diese achsenparallelen kleinen Quadrate auch in den $q(\mathrm{ct}_m(n))$ zentriert denken. Dann wäre alles quadratsymmetrisch zum Ursprung $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

6.2 Streckenintegrale

$$
\begin{aligned}
\int_{q_0}^{q} f(w)dw &= \lim_m(\sum_{i=0}^{m-1} f(q_0 + idw)dw,\ dw = \frac{q-q_0}{m}) : \\
&\quad \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ \text{Variable } q,\ q_0,\ f : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \text{ fest.} \\
d(\int_{q_0}^{q} f(w)dw)(q) &= f(q)dq, \\
\frac{d\int_{q_0}^{q} f(w)dw}{dq} &= f(q) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \\
\int_{q_0}^{q} df(w,dw) &= \int_{q_0}^{q} \frac{df(w,dw)}{dw} dw = f(q) - f(q_0).
\end{aligned}
$$

6.3 Elementare Funktionen

Die Exponentialfunktion $e^w = \exp(w) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ ist gesucht als Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{de^w}{dw} = e^w$$

mit $e^0 = 1$.

Diese Lösung muss als Taylorentwicklung haben

$$
\begin{aligned}
\exp(w) &= \exp(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!} w^n \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \setminus \{0\},
\end{aligned}
$$

und diese Funktion e^w löst die Dgl. mit $e^0 = 1$, eindeutig.

$$
\begin{aligned}
e^w &= e^{t+\mathbf{i}\,x+\mathbf{j}\,y+\mathbf{k}\,z} \\
&= e^t \cdot (\cos x + \mathbf{i}\,\sin x) \cdot (\cos y + \mathbf{j}\,\sin y) \cdot (\cos z + \mathbf{k}\,\sin z)
\end{aligned}
$$

Doppel-komplex Kreis:

$$\begin{aligned}
e^{(t+\mathbf{i}\,y)\mathbf{j}} &= e^{\mathbf{j}\,t+\mathbf{k}\,y} = e^{\mathbf{j}\,t}\cdot e^{\mathbf{k}\,y}\\
&= (\cos t+\mathbf{j}\,\sin t)\cdot(\cos y+\mathbf{k}\,\sin y)\\
&= \cos t\cos y+\mathbf{k}\,\cos t\sin y+\mathbf{j}\,\sin t\cos y+\mathbf{i}\,\sin t\sin y,\\
e^{t\mathbf{j}} &= \cos t+\mathbf{j}\,\sin t,\\
e^{y\mathbf{i}\,\mathbf{j}} &= e^{y\mathbf{k}} = \cos y+\mathbf{i}\,\sin y.
\end{aligned}$$

Multiplikative Verknüpfung zweier Einheitskreise.

Einheitskreis in der $\mathbf{i}\,\mathbb{R}+\mathbf{k}\,\mathbb{R}$ Ebene:

$$\mathbf{i}\,e^{\mathbf{j}\,t} = \mathbf{i}\,\cos t+\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\sin t = \mathbf{i}\,\cos t+\mathbf{k}\,\sin t$$

Einheitskreis in der $\mathbf{i}\,\mathbb{R}+\mathbf{j}\,\mathbb{R}$ Ebene:

$$\mathbf{i}\,e^{\mathbf{k}\,t} = \mathbf{i}\,\cos t+\mathbf{k}\,\mathbf{i}\,\sin t = \mathbf{i}\,\cos t+\mathbf{j}\,\sin t$$

Der Graph in $\mathbb{H}=\mathbb{R}+\mathbf{i}\,\mathbb{R}+\mathbf{j}\,\mathbb{R}+\mathbf{k}\,\mathbb{R}$ ist eine mit t aufsteigende Wendel.

Der (natürliche) Logarithmus $\log w$ ist gesucht als Umkehrfunktion zu $e^w:\mathbb{H}\to\dot{\mathbb{H}}=\mathbb{H}\smallsetminus\{0\}$, seine Ableitung muss sein

$$\begin{aligned}
\frac{d\log(w,dw)}{dw} &= \frac{1}{\frac{d\exp(\log w,dq)}{dq}}\\
&= \frac{1}{e^{\log w}} = \frac{1}{w}:\dot{\mathbb{H}}\to\mathbb{H},
\end{aligned}$$

und die Taylorreihe um $w_0=1$ für $0\notin\vec{1w}$, d. h. $\mathbb{H}$ geschlitzt in $[0,-\infty]_{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned}
\log(1+w) &= \log 1+(\frac{1}{w})(1)w+\frac{(\frac{1}{w})'(1)}{2!}(1)w^2+\frac{(\frac{1}{w})''(1)}{3!}w^3+\ldots\\
&\quad+\frac{(\frac{1}{w})^{(n-1)}(1)}{n!}w^n+\ldots\\
&= w-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{w^n}{n}+\ldots\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{w^n}{n}
\end{aligned}$$

Was passiert für $|w|^2>1$?

6.4 Kurvenintegrale

Eine Kurve ist eine (normale) stetige Abbildung

$$\gamma = \gamma(t) : [0,1] \to \Im\mathbb{H} = \mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R} + \mathbf{k}\,\mathbb{R} \subset \mathbb{H}.$$

Sie heißt *geschlossen* falls $\gamma(0) = \gamma(1)$, und wird dann aufgefasst als

$$\gamma = \gamma(\mathbf{i}\,t) : S^1 = \{e^{2\pi\mathbf{i}\,t} : t \in \mathbb{R}\}/(1.0) \to \mathbb{H},$$

gelegentlich auch – mehrfacher Umlauf – ohne oder mit anderer Faktorisierung, z. B. zweiblättriges $\mathbb{H}$.

Das Kurvenintegral von $f = f(w) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ entlang Kurve $\gamma = \gamma(t) : [0,1] \to \mathbb{H}$ ist

$$\begin{aligned} I(f,\gamma) &= \int_\gamma df \\ &= \int_{t=0}^{1} df(w, d\gamma(t,dt)) \\ &= \lim_m \sum_{i=0}^{m-1} f(\gamma(\frac{i}{m})) \cdot (\gamma(\frac{i+1}{m}) - \gamma(\frac{i}{m})) \end{aligned}$$

Ein solches Integral ist unabhängig vom Wege von $\gamma(0)$ nach $\gamma(1)$, falls $I(f,\gamma) = 0$ für jedes geschlossene γ, genau dann, wenn es für infinitesimale geschlossene γ verschwindet, gdw.

$$\begin{aligned} \mathrm{rot} f(w) &= \mathbf{i}\,(\partial_\mathbf{j} f_\mathbf{k} - \partial_\mathbf{k} f_\mathbf{j}) + \mathbf{j}\,(\partial_\mathbf{k} f_\mathbf{i} - \partial_\mathbf{i} f_\mathbf{k}) + \mathbf{k}\,(\partial_\mathbf{i} f_\mathbf{j} - \partial_\mathbf{j} f_\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_\mathbf{i} & \partial_\mathbf{j} & \partial_\mathbf{k} \\ f_\mathbf{i} & f_\mathbf{j} & f_\mathbf{k} \end{vmatrix}(w) = 0 \end{aligned}$$

Chapter 7

Analytische Geometrie

7.1 Lineare versus sphärische Komplexe

Einheits-1-Simplizes, Intervalle

$$
\begin{aligned}
I^1 &= I = \{t : 0 \le t \le 1\} \\
&= \{t + \mathbf{i}\,0 + \mathbf{j}\,0 + \mathbf{ji}\,0 : 0 \le t \le 1\} \subset \mathbb{H}, \\
\mathbf{i}\,I &= \{0 + \mathbf{i}\,t : 0 \le t \le 1\} \subset \mathbb{H}, \\
\mathbf{j}\,I &= \{\mathbf{j}\,t : 0 \le t \le 1\}, \\
\mathbf{k}\,I &= \mathbf{ji}\,I = \{\mathbf{k}\,t : 0 \le t \le 1\}.
\end{aligned}
$$

Einheits-0-Simplizes: $\{0\}, \{1\}, \{\mathbf{i}\}, \{\mathbf{j}\}, \{\mathbf{k}\}$.

Einheits-0-Sphären

$$S^0 = \{-1, 1\},\ S^0_{\mathbf{i}} = \{-\mathbf{i}, \mathbf{i}\},\ S^0_{\mathbf{j}} = \{-\mathbf{j}, \mathbf{j}\},\ S^0_{\mathbf{k}} = \{-\mathbf{ji}, \mathbf{ji}\}.$$

Sphären

- 0-Sphäre S^0 (Doppelpunkt)

$$
\begin{aligned}
S^0 &= \{-1, +1\} \\
&= \{t : |t|^2 = 1\}
\end{aligned}
$$

- 1-Sphäre S^1, Kreis in der Ebene $\mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S^1 &= \{w = t + \mathbf{i}\,x : |w|^2 = 1\} \\ &= e^{\mathbf{i}\,t} = \cos t + \mathbf{i}\,\sin t : \mathbb{R} \to \mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R}, \end{aligned}$$

  Pendeluhr in $\mathbf{i}$-Richtung.

  1-Sphäre in $\mathbf{i}\,,\mathbf{j}$-Ebene $\mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S^1_{\mathbf{i}\,,\mathbf{j}} &= \{w = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y : |w|^2 = 1\} \\ S^1_{\mathbf{i}\,,\mathbf{j}}(\varphi) &= \mathbf{i}\,e^{\mathbf{k}\,\varphi} = \mathbf{i}\,\cos t + \mathbf{i}\,\mathbf{k}\,\sin t \\ &= \mathbf{i}\,\cos t + \mathbf{i}\,\mathbf{ji}\,\sin t = \mathbf{i}\,\cos t + \mathbf{j}\,\sin t : \\ &\quad\ \mathbb{R} \to \mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R} \subset \mathbb{H}. \end{aligned}$$

- 2-Sphäre S^2

$$\begin{aligned} S^2 &= \{w = t + \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y : |w^2| = 1\} \\ &= e^{\mathbf{i}\,(t_\mathbf{i}\,+e^{\mathbf{j}}\,t_\mathbf{j}\,)} = e^{\mathbf{i}}\,t_\mathbf{i}\,\cdot e^{\mathbf{j}}\,t_\mathbf{j} \\ &= \cos t_\mathbf{i}\,+ \cos t_\mathbf{j}\,+ \mathbf{i}\,\sin t_\mathbf{i}\,+ \mathbf{j}\,\sin t_\mathbf{j}\,: \\ &\quad\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R}. \end{aligned}$$

  gleichmäßiges Kreisen in der horizontalen Ebene.

- räumliche S^2

$$\begin{aligned} S^2_{\Im} &= \{w = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z : |w|^2 = 1\} \\ &= e^{(\mathbf{i}\,\alpha + \mathbf{j}\,\beta + \mathbf{k}\,\gamma)} : \mathbb{R}^3 \to \Im_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

  mehrfach überlagernde 2-Sphäre im Raum.

7.2 Quaternionen-Analysis der 1-Sphäre

Von jetzt an sei

$$S^1 \quad = \quad S^1 t = \mathbf{i}\,\cos t + \mathbf{j}\,\sin t = \mathbf{i}\,e^{\mathbf{k}\,t} : \mathbb{R} \to \mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$$

die *geometrische* 1-Sphäre in der/die $\mathbf{i}\,,\mathbf{j}$-Ebene, um die Normale $\mathbf{k}$.

[Wegen 2π irrational liegt $S^1\mathbb{N}$ dicht in $S^1[-\pi, \pi]$.]

Bogenlänge

Das Kreisdifferenzial ist

$$\begin{aligned} d\mathbf{i}\, e^{\mathbf{k}\,t} &= \mathbf{i}\,(e^{\mathbf{k}\,(t+dt)} - e^{\mathbf{k}\,t}) \\ &= \mathbf{i}\,(e^{\mathbf{k}\,t}e^{\mathbf{k}\,dt} - e^{\mathbf{k}\,t}) \\ &= \mathbf{i}\,e^{\mathbf{k}\,t}(e^{\mathbf{k}\,dt} - 1) \\ &\approx^2 \mathbf{i}\,e^{\mathbf{k}\,t}dt. \end{aligned}$$

$S^1 t : \mathbb{R} \to \mathbf{i}\,\mathbb{R}+\mathbf{j}\,\mathbb{R} \xrightarrow{\subset} \mathbb{H}$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und Gruppe, eine Lie-Gruppe, die einfachste aller Lie-Gruppen, eine differenzierbare Matrixgruppe mit vielen diskreten Untergruppen, eine Lie-Algebra.

$$\begin{aligned} \log \mathbf{i}\, e^{\mathbf{k}\,t} &= \log \mathbf{i}\, + \log e^{\mathbf{k}\,t} = \log(1 + (\mathbf{i}\, - 1)) + \mathbf{k}\,t \\ &= \mathbf{k}\,t + (\mathbf{i}\, - 1) - \frac{(\mathbf{i}\, - 1)^2}{2} + \frac{(\mathbf{i}\, - 1)^3}{3} - + \ldots \\ &= \mathbf{k}\,t + (\mathbf{i}\, - 1) + \mathbf{i}\, \arccos 0 \\ &= \mathbf{k}\,t + \log e^{\mathbf{i}\,\frac{\pi}{2}} = \mathbf{k}\,t + \mathbf{i}\,\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

nach Definition von $\frac{\pi}{2}$.

Die inverse Funktion arccos ist gegeben als Potenzreihe, besser konvergiert – Leibniz – die alternierende Reihe

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - 1/3 + 1/5 - + \ldots$$

7.3 Kreise

Ausgangspunkt ist der – ∞ überdeckte – Einheitskreis $S^1 = S^1_{\mathbf{k}}$ in der $\mathbf{i}\,,\mathbf{j}$ Ebene,

$$\begin{aligned} S^1 &= S^1 t = S^1_{\mathbf{k}}\, t = \mathbf{i}\, e^{\mathbf{k}\,t} = \mathbf{i}\, \cos t + \mathbf{j}\, \sin t : \\ & \quad \mathbb{R} \to \mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R},\ \textit{time}\ \mathbb{R}\ \textit{partioned:} \\ \mathbb{R} &= \dot\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} 2n\pi +]-\pi, \pi]\ \text{(Blätter)}, \end{aligned}$$

in $\mathbf{j}\,,\mathbf{k}$ und $\mathbf{k}\,,\mathbf{i}$ Ebene:

$$\begin{aligned} S^1_{\mathbf{i}}t &= \mathbf{j}\, e^{\mathbf{i}\,t} = \mathbf{j}\, \cos t + \mathbf{k}\, \sin t : \mathbb{R} \to \mathbf{j}\,\mathbb{R} + \mathbf{k}\,\mathbb{R}, \\ S^1_{\mathbf{j}}t &= \mathbf{k}\, e^{\mathbf{j}\,t} = \mathbf{k}\, \cos t + \mathbf{i}\, \sin t : \mathbb{R} \to \mathbf{j}\,\mathbb{R} + \mathbf{k}\,\mathbb{R}; \end{aligned}$$

Einheitskreis in der Ebene normal zu

$$\mathbf{i}\,\alpha + \mathbf{j}\,\beta + \mathbf{k}\,\gamma,\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Exercise per Bewegung im $\Im\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$.

Kreisscharen

$$\mathbf{j}\,\mathbb{R} \ni \mathbf{j}\,r \mapsto [\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{\mathbf{k}\,t}\mathbf{i}\,r : \mathbb{R} \to \mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R},]$$

negatives r resultiert in einer Rotation um π, Lücken-Übergänge dann bei $t = (2n+1)\pi$ statt bei $t = 2n\pi$. Auf welcher Seite sollen die Intervalle dann offen sein? Positiver oder negativer Drehsinn? Besser negativ, dann Zeitstruktur unveraendert, Intervalle wieder links offen, also $(-r, t)$ überdeckt $(r, -t)$ mit Wechsel zwischen geradzahlig und ungeradzahlig aufgehängten Intervallen $]-\pi, \pi]$. Man kann den Übergang $r \mapsto -r$ auch als – sagen wir sehr kurzfristige – Orientierungsumkehr der $\mathbf{j}$-Raumachse sehen, besser nicht als lokale Zeitumkehrung: manche Physiker interpretieren die kurzlebigen Positronen als zeitlich rückwärtige Elektronen. Nach obigem wäre es angemessener, sie als *Hohlelektronen* zu denken, als räumlich negative Elektronen.

Bei gleichzeitiger Variation von r und t ergibt sich die $\pm\infty$ blättrige (Riemannsche) Fläche

$$\mathrm{Rie} \;=\; \mathrm{Rie}_\infty(\mathbf{j}\,r, t) = e^{\mathbf{k}\,t}\mathbf{i}\,r : \mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R} \to \mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R}.$$

Einheits-1-Sphären

Standarduhr

$$\begin{aligned} S^1 &= S^1_{\mathbf{i}} = \{e^{\mathbf{i}\,t} : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\cos t + \mathbf{i}\,\sin t : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R} \subset \mathbb{H}, \end{aligned}$$

dreht mathematisch positiv in der $\mathbb{R} + \mathbf{i}\,\mathbb{R}$-Ebene, horizontale Sinus-*Schwingung* nach *vorn,* Richtung Auge.

Abgewickelte Schwingung:

$$\mathrm{si} \;=\; \mathrm{si}_{\mathbf{i}} = \{t + \mathbf{i}\,\sin t : t \in \mathbb{R}\},$$

dynamisch nichts anderes als

$$\mathbf{i}\,\sin t : \mathbb{R} \to \mathbf{i}\,\mathbb{R} \subset \mathbb{H}.$$

Zyklisch analog: $\mathrm{si}_{\mathbf{j}}\,,\mathrm{si}_{\mathbf{k}}$ Sinus-Schwingungen nach rechts bzw. nach oben.

Analog: $S^1_{\mathbf{j}}$ und $S^1_{\mathbf{k}}$, Schwingunsuhren in der $\mathbb{R}+\mathbf{j}\,\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{R}+\mathbf{k}$-Ebene, alle drei orthogonal zur $\mathbb{R}$-Achse; $S^1_{\mathbf{k}}$ Lichtschwingungen.

Horizontaler Einheitskreis

$$\begin{aligned}\mathbf{i}\,S^1_{\mathbf{k}} &= \{\mathbf{i}\,e^{\mathbf{k}\,t} : t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{\mathbf{i}\,(\cos t+\mathbf{k}\,\sin t) : t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{\mathbf{i}\,\cos t+\mathbf{j}\,\sin t : t\in\mathbb{R}\},\end{aligned}$$

dreht mathematisch positiv in der $\mathbf{i}\,\mathbb{R}+\mathbf{j}\,\mathbb{R}$-Ebene, der *Tischebene,* um die vertikale $\mathbf{k}$-Achse. Das ist die *geometrische Uhr,* Sonnenuhr auf der Südhemisphäre, hypothetisch, denn existierten dort je Sonnenuhren?

+ zyklisch, $\mathbf{i}\mapsto\mathbf{j}\mapsto\mathbf{k}\mapsto\mathbf{i}$:

Tafelkreis

$$\begin{aligned}\mathbf{j}\,S^1 &= \mathbf{j}\,S^1_{\mathbf{i}} = \{\mathbf{j}\,e^{\mathbf{i}\,t} : t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{\mathbf{j}\,(\cos t+\mathbf{i}\,\sin t) : t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{\mathbf{j}\,\cos t+\mathbf{k}\,\sin t : t\in\mathbb{R}\},\end{aligned}$$

dreht mathematisch positiv in der $\mathbf{j}\,\mathbb{R}+\mathbf{k}\,\mathbb{R}$-Ebene, *Tafelebene,* um die $\mathbf{i}$-Achse, die *Tafel-Auge-Achse.*

Raumkreis

$$\begin{aligned}\mathbf{k}\,S^1_{\mathbf{j}} &= \{\mathbf{k}\,e^{\mathbf{j}\,t} : t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{\mathbf{k}\,(\cos t+\mathbf{j}\,\sin t) : t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{\mathbf{k}\,\cos t+\mathbf{i}\,\sin t : t\in\mathbb{R}\},\end{aligned}$$

dreht mathematisch positiv in der $\mathbf{k}\,\mathbb{R}+\mathbf{i}\,\mathbb{R}$-Ebene. Interpretation: Überkopf orthogonal verdrehter Kreis; geheimnisvoll, aber gleichberechtigt mit den anderen bei Abwesenheit von Gravitation.

Einheits-2-Simplizes

Standard Zeit-Raum 2-Simplex

$$\begin{aligned}I^2 &= I^2_{\mathbf{i}} = \{t+\mathbf{i}\,\xi : t+\xi\le 1,\ 0\le t,\xi\le 1\}\\ &\subset E^1 = \{t+\mathbf{i}\,\xi\in\mathbb{H} : t+\xi\le 1,\ 0\le t\}\\ &= \{t+\mathbf{i}\,0+\mathbf{j}\,0+\mathbf{ji}\,0 : 0\le t\le 1\}\subset\mathbb{H},\end{aligned}$$

simplizial koordinierte Logik-Ebene.

Tafel 2-Simplex

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}\,I^2 &= \mathbf{j}\,I^2_{\mathbf{i}} \\
&= \mathbf{j}\,\{t+\mathbf{i}\,\xi : t+\mathbf{i}\,\xi : t+\xi \le 1,\ 0 \le t,\xi \le 1\} \\
&= \{\mathbf{j}\,t+\mathbf{k}\,\xi : t+\mathbf{i}\,\xi : t+\xi \le 1,\ 0 \le t,\xi \le 1\} \\
&= \{\mathbf{j}\,\eta+\mathbf{k}\,\zeta : \eta+\zeta \le 1,\ 0 \le \eta,\zeta \le 1\} \\
&\subset \mathbf{j}\,E^2_{\mathbf{i}} = \mathbf{j}\,\mathbb{R}+\mathbf{k}\,\mathbb{R} \subset \mathbb{H};
\end{aligned}$$

dreht mathematisch positiv in die simplizial koordinierte $\mathbf{j}\,\mathbb{R}+\mathbf{k}\,\mathbb{R}$-Ebene, *Tafelebene.*

$$\mathbf{k}\,I^2 \subset \mathbf{k}\,E^2_{\mathbf{j}} = \mathbf{k}\,\mathbb{R}+\mathbf{i}\,\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$$

und $\mathbf{k}\,I^2 \subset \mathbf{i}\,E^2_{\mathbf{k}} = \mathbf{i}\,\mathbb{R}+\mathbf{j}\,\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$: **horizontal,** zyklisch analog.

2-Simplizes

i-gedrehtes Zeit-Raum 2-Simplex

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}\,I^2 &= \{\mathbf{i}\,t+\mathbf{i}^2\xi : t+\xi \le 1,\ 0 \le t,\xi \le 1\} \\
&= \{\mathbf{i}\,t-\xi : t+\xi \le 1,\ 0 \le t,\xi \le 1\} \\
&\subset \mathbf{i}\,E^2 = \{\mathbf{i}\,t-\xi : t+\xi \le 1\} \subset \mathbb{H}.
\end{aligned}$$

gedrehtes Triangel in der Zeit-Raum-Ebene $\mathbb{R}+\mathbf{i}\,\mathbb{R}$.

+ zyklisch, $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{j} \mapsto \mathbf{k} \mapsto \mathbf{i}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}\,I^2 &= \{\mathbf{j}\,t-\eta : t+\eta \le 1,\ 0 \le t,\eta \le 1\} \\
&\subset \mathbf{j}\,E^2 = \{\mathbf{j}\,t-\eta : t+\eta \le 1\} \subset \mathbb{H},
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}\,I^2 &= \{\mathbf{k}\,t-\zeta : t+\zeta \le 1,\ 0 \le t,\zeta \le 1\} \\
&\subset \mathbf{k}\,E^2 = \{\mathbf{k}\,t-\zeta : t+\zeta \le 1\} \subset \mathbb{H}.
\end{aligned}$$

Ränder von 1- und 2-Simplizes

Die Ränder der 1-Simplexe $I^1 = I, \mathbf{i}\, I, \mathbf{j}\, I, \mathbf{k}\, I$ sind

$$\begin{aligned}
\partial I &= +\{1\} - \{0\} \in \oplus_{\mathbb{Z}}[\mathbb{H}, 2],\\
\partial \mathbf{i}\, I &= +\{\mathbf{i}\,\} - \{0\} \in \oplus_{\mathbb{Z}}[\mathbb{H}, 2],\\
\partial \mathbf{j}\, I &= +\{\mathbf{j}\,\} - \{0\} \in \oplus_{\mathbb{Z}}[\mathbb{H}, 2],\\
\partial \mathbf{k}\, I &= +\{\mathbf{k}\,\} - \{0\} \in \oplus_{\mathbb{Z}}[\mathbb{H}, 2].
\end{aligned}$$

$\oplus_{\mathbb{Z}}[\mathbb{H}, 2]$ ist der freie $\mathbb{Z}$-Modul (die freie abelsche Gruppe) über den prädikativen Teilmengen $[\mathbb{H}, 2]$ von $\mathbb{H}$.

Die Ränder der Einheits-2-Simplexe sind

$$\begin{aligned}
\partial I^2 &= +\{t + \mathbf{i}\,\xi : t + \xi = 1,\ 0 \le t \le 1\} \in \oplus_{\mathbb{Z}}[\mathbb{H}],\\
\partial \mathbf{i}\, I^2 &= \mathbf{i}\,\partial I^2\\
&= +\{\mathbf{i}\,\xi + \mathbf{j}\,\eta : \xi + \eta = 1,\ 0 \le t \le 1\} \in \oplus_{\mathbb{Z}}[\mathbb{H}],\\
\partial \mathbf{j}\, I^2 &= \mathbf{j}\,\partial I^2\\
&= +\{\mathbf{i}\,\xi + \mathbf{j}\,\eta : \xi + \eta = 1,\ 0 \le t \le 1\},\\
\partial \mathbf{j}\, I^2 &= \mathbf{j}\,\partial I^2\\
&= +\{\mathbf{i}\,\xi + \mathbf{j}\,\eta : \xi + \eta = 1,\ 0 \le t \le 1\}.
\end{aligned}$$

$\partial\partial = 0$-**Lemma:** Die Ränder $\partial\partial I^2$, $\partial\partial\mathbf{i}\, I^2$, $\partial\partial\mathbf{j}\, I^2$, $\partial\partial\mathbf{k}\, I^2$ der Ränder aller obigen 2-Simplexe verschwinden in $\oplus_{\mathbb{Z}}[\mathbb{H}, \mathbb{H}]$.

7.4 Eine Unterteilung der S^2 als Komplex

Betrachte folgenden Kettenkomplex K auf der

$$S^2 = \{\mathbf{i}\,\cos\varphi + \mathbf{j}\,\sin\varphi + \mathbf{k}\,\sin\vartheta : -\pi \le \varphi \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\};$$

0-Kette:

$$C_0 = \{\mathbf{k}\,\}\dot\vee\{-\mathbf{k}\,\} : \text{Nord- und Südpol;}$$

1-Kette: Äquatorquadranten

$$\begin{aligned}
C_1 \quad = \quad & \mathbf{k}\, S^1_{-,-} = \{\mathbf{i}\, \cos\varphi + \mathbf{j}\, \sin\varphi : -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}\} \\
& \dot\vee \mathbf{k}\, S^1_{-,0} = \{\mathbf{i}\, \cos\varphi + \mathbf{j}\, \sin\varphi : -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0\} \\
& \dot\vee \mathbf{k}\, S^1_{0,+} = \{\mathbf{i}\, \cos\varphi + \mathbf{j}\, \sin\varphi : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\} \\
& \dot\vee \mathbf{k}\, S^1_{+,+} = \{\mathbf{i}\, \cos\varphi + \mathbf{j}\, \sin\varphi : \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi\}
\end{aligned}$$

+ Meridianquadranten:

$$\begin{aligned}
& \dot\vee \mathbf{j}\, S^1_{-,0} = \{\mathbf{i}\, \cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0\} \\
& \dot\vee \mathbf{j}\, S^1_{0,+} = \{\mathbf{i}\, \cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\}, \\
& \qquad \text{(Null-Halbmeridiane, Greenwhich)}, \\
& \dot\vee \mathbf{i}\, S^1_{-,0} = \{\mathbf{j}\, \cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0\} \\
& \dot\vee \mathbf{i}\, S^1_{0,+} = \{\mathbf{j}\, \cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\} \\
& \qquad \text{(Mt. Everest)} \\
& \dot\vee - \mathbf{i}\, S^1_{-,0} = \{-\mathbf{i}\, \cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0\} \\
& \dot\vee - \mathbf{i}\, S^1_{0,+} = \{-\mathbf{i}\, \cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\} \\
& \qquad \text{(Datumsgrenze)}, \\
& \dot\vee - \mathbf{j}\, S^1_{-,0} = \{-\mathbf{j}\, \cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0\} \\
& \dot\vee - \mathbf{j}\, S^1_{0,+} = \{-\mathbf{j}\, \cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\} \\
& \qquad \text{(New Orleans)}.
\end{aligned}$$

2-Kette: 8 Sphärenoktanden:

$$
\begin{aligned}
C_2 \quad = \quad & -\mathbf{k}\, S^2_{OO} = \{(\mathbf{i}\, \cos\varphi + \mathbf{j}\, \sin\varphi)\cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : \\
& 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0\} \\
& \text{(AFRIKA)} \\
& \dot{\vee} - \mathbf{k}\, S^2_{OI} = \{(\mathbf{i}\, \cos\varphi + \mathbf{j}\, \sin\varphi)\cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : \\
& \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0\} \\
& \text{(SO ASIEN)} \\
& \dot{\vee} - \mathbf{k}\, S^2_{IO} = \{(\mathbf{i}\, \cos\varphi + \mathbf{j}\, \sin\varphi)\cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : \\
& \pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0\} \\
& \text{(SÜD PACIFIC)} \\
& \dot{\vee} - \mathbf{k}\, S^2_{II} = \{(\mathbf{i}\, \cos\varphi + \mathbf{j}\, \sin\varphi)\cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : \\
& \frac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0\} \\
& \text{(SÜD AMERIKA)} \\
& \dot{\vee}\mathbf{k}\, S^2_{OO} = \{(\mathbf{i}\, \cos\varphi + \mathbf{j}\, \sin\varphi)\cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : \\
& 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\} \\
& \text{(EUROPA)} \\
& \dot{\vee}\mathbf{k}\, S^2_{OI} = \{(\mathbf{i}\, \cos\varphi + \mathbf{j}\, \sin\varphi)\cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : \\
& \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\} \\
& \text{(ASIEN)} \\
& \dot{\vee}\mathbf{k}\, S^2_{IO} = \{(\mathbf{i}\, \cos\varphi + \mathbf{j}\, \sin\varphi)\cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : \\
& \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\} \\
& \text{(NORDPAZIFIK)} \\
& \dot{\vee}\mathbf{k}\, S^2_{II} = \{(\mathbf{i}\, \cos\varphi + \mathbf{j}\, \sin\varphi)\cos\vartheta + \mathbf{k}\, \sin\vartheta : \\
& \frac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\} \\
& \text{(NORDAMERIKA)}
\end{aligned}
$$

Chapter 8

Eine 12-dimensionale Raumzeit-Algebra

8.1 Octonionen

Betrachte Quaternionen $\mathbb{H}\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}\mathbb{C} &= \mathbb{C}[\mathbf{i}, \mathbf{j}]/(\mathbf{i}^2 = -1 = \mathbf{j}^2, \mathbf{j}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{j}) \\
&= (\mathbb{R}[i]/(i^2 = -1))[\mathbf{i}, \mathbf{j}]/(\mathbf{i}^2 = -1 = \mathbf{j}^2, \mathbf{j}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{j}) \\
&= \{z_0 + \mathbf{i}\, z_{\mathbf{i}} + \mathbf{j}\, z_{\mathbf{j}} + \mathbf{k}\, z_{\mathbf{k}} : z_0, z_{\mathbf{i}}, z_{\mathbf{j}}, z_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}\} \\
&= \{(\alpha_0 + i\beta_0) + \mathbf{i}\,(\alpha_{\mathbf{i}} + i\beta_{\mathbf{i}}) + \mathbf{j}\,(\alpha_{\mathbf{j}} + i\beta_{\mathbf{j}}) + \mathbf{k}\,(\alpha_{\mathbf{k}} + i\beta_{\mathbf{k}}\} \\
&= \{\begin{bmatrix} \alpha_0 & -\beta_0 \\ \beta_0 & \alpha_0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \mathbf{i}\begin{bmatrix} \alpha_{\mathbf{i}} & -\beta_{\mathbf{i}} \\ \beta_{\mathbf{i}} & \alpha_{\mathbf{i}} \end{bmatrix} + \mathbf{j}\begin{bmatrix} \alpha_{\mathbf{j}} & -\beta_{\mathbf{j}} \\ \beta_{\mathbf{j}} & \alpha_{\mathbf{j}} \end{bmatrix} + \mathbf{k}\begin{bmatrix} \alpha_{\mathbf{k}} & -\beta_{\mathbf{k}} \\ \beta_{\mathbf{k}} & \alpha_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} : \\
&\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^4\} \\
&\quad \text{(formale Linearkombinastionen in } \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\text{)}.
\end{aligned}$$

komplexe Quaternionen, Octonionen.

Die haben *Nullteiler.* Sie bilden eine divisible $\mathbb{R}$-Algebra der Dimension 8. Division durch reelle Zahlen erlaubt.

Betrachte Quaternionen $\mathbb{H}\mathbb{H}$ über $\mathbb{H}$,

$$\mathbb{H}\mathbb{H} = \mathbb{H}[i, j]/(i^2 = -1 = j^2, ji = -ij)$$

Quaternionenquaternionen.

Sie bilden eine 16-dimensionale Vektoralgebra mit Vektorraumbasis

$$\begin{aligned}
&1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} = \mathbf{ji},\\
&i1, i\mathbf{i}, i\mathbf{j}, i\mathbf{k} = i\,\mathbf{ji},\\
&j1, j\mathbf{i}, j\mathbf{j}, j\mathbf{k} = j\,\mathbf{ji},\\
&ji1, ji\mathbf{i}, ji\mathbf{j}, ji\mathbf{k} = ji\,\mathbf{ji}.
\end{aligned}$$

Zusätzliche Gleichungen: Identifiziere $j \cdot i$ mit $\mathbf{k}$ (fett), Projektion der zu $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$-Raum senkrechten i, j-Ebene auf eine Ebene orthogonal zu $\mathbf{k}$ in 16-dimensionalem $\mathbb{H}$, Parallelebene zu $\mathbf{i}, \mathbf{j}$-Ebene, denn beide orthogonal zu $\mathbf{k}$; das ergibt eine 12-dimensionale Vektoralgebra

$$\mathbb{H}/(ji = \mathbf{k}).$$

Vektorraumbasis:

$$\begin{aligned}
&1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} = \mathbf{ji},\\
&i1, i\mathbf{i}, i\mathbf{j}, i\mathbf{k} = i\,\mathbf{ji},\\
&j1, j\mathbf{i}, j\mathbf{j}, j\mathbf{k} = j\,\mathbf{ji}.
\end{aligned}$$

8.2 Algebra $\mathbb{H}\mathbb{h}$ mit 8 eingerollten Dimensionen

Setze

$$\begin{aligned}
&\imath = \varepsilon i,\ \jmath = \varepsilon j \text{ d. h.}\\
&\imath = \frac{1}{(2, 3, \ldots, p_n, \ldots)} i,\ \jmath = \frac{1}{(2, 3, \ldots, p_n, \ldots)} j \text{ oder}\\
&\imath = \frac{1}{(4-1, 8-1, 32-1, \ldots, \text{n-te Fermat Primzahl})} i,\ \jmath \text{ analog.}
\end{aligned}$$

Hier handelt es sich um eine Nullfolge oder um eine endliche Folge, je nachdem ob es unendlich viele oder aber nur endlich viele Fermat Primzahlen gibt. (Diese Frage und viele andere sind rekursiv entscheidbar.)

In der Vektoralgebra $\mathbb{H}/(ji = \mathbf{k})$ ersetzen wir die Basisvektoren (Zahlen) i, j durch die *eingerollten Vektoren* $\imath, \jmath$ oben. Das ergibt eine neue *Raumzeit* $\mathbb{H}\mathbb{h} = \mathbb{H}[\imath, \jmath]/(\imath^2 = -\tilde{\varepsilon}^2 = \jmath^2, \jmath\imath = \tilde{\varepsilon}^2\mathbf{k})$,

- 4 Makrodimensionen $t, \mathbf{i}\mathbb{R}, jj\mathbb{R}, \mathbf{k}\mathbb{R}$ und

- 8 Mikrodimensionen (*eingerollt*)

$$\begin{aligned}&\imath\mathbb{R}, \jmath\mathbb{R},\\ &\imath\mathbf{i}\,\mathbb{R}, \imath\mathbf{j}\,\mathbb{R}, \imath\mathbf{k}\,\mathbb{R},\\ &\jmath\mathbf{i}\,\mathbb{R}, \jmath\mathbf{j}\,\mathbb{R}, \jmath\mathbf{k}\,\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Produkte von letzteren mit Makrogrößen ergeben Mikrovektoren, Produkte solcher Vektoren untereinander ergeben *Nanovektoren.*

Vektoren $\imath t, \jmath t$ können als mikroräumliche Vektoren aufgefasst werden. Die Ebene $\imath\mathbb{R} + \jmath\mathbb{R}$ spielt die Rolle einer mikrokomplexen Ebene mit Nanonormalen $\tilde{\varepsilon}^2\mathbf{k}$. Kurz:

$$\begin{aligned}\mathbb{h} &= \mathbb{R} + \imath\mathbb{R} + \jmath\mathbb{R} + \mathbf{k}\,\tilde{\varepsilon}^2\mathbb{R}\\ &= \mathbb{R} + i\tilde{\varepsilon}\mathbb{R} + j\tilde{\varepsilon}\mathbb{R} + \mathbf{k}\,\tilde{\varepsilon}^2\mathbb{R}\end{aligned}$$

ist eine Untervektoralgebra vom Quaternionen-Typ. Räumliche *Mikro-Uhren:*

$$\begin{aligned}e^{\jmath t}\imath &= \imath - \mathbf{k}\,t\tilde{\varepsilon}^2 - \frac{\mathbf{i}\,t^2}{2!}\tilde{\varepsilon}^3 + \frac{\mathbf{k}\,t^3}{3!}\tilde{\varepsilon}^4 \mp \ldots :\\ &\quad \mathbb{R} \to \imath\mathbb{R} + \mathbf{k}\,\tilde{\varepsilon}^2\mathbb{R},\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}e^{\imath t}\jmath &= \jmath + \mathbf{k}\,t\tilde{\varepsilon}^2 - \frac{\mathbf{j}\,t^2}{2!}\tilde{\varepsilon}^3 - \frac{\mathbf{k}\,t^3}{3!}\tilde{\varepsilon}^4 + \ldots :\\ &\quad \mathbb{R} \to \imath\mathbb{R} + \mathbf{k}\,\tilde{\varepsilon}^2\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Sind das geschlossene (Mikro)kurven? Eher nicht, sie sehen näherungsweise, in einer kleinen Nullumgebung des Parameters t aus wie nach unten bzw. oben geöffnete (Mikro)Parabeln. Aber was passiert für sehr sehr große t, $t \to \infty^\infty$?

Die Algebra $\mathbb{h}$ ist **Protokeim** der Quaternionen-Algebra $\mathbb{H}$. Durch Transposition ihrer Nanonormalen $\mathbf{k}\,\tilde{\varepsilon}^2$ von 0 in die Normale einer Fläche in $\mathbb{H} \subset \mathbb{H}\mathbb{h}$ in allen (rationalen) Punkten der Fläche werden wir die Fläche zu einer Vektoralgebrenwertigen **Garbe** machen, die Keime dieser Garbe sind dann gerade die lokalen Algebren $\mathbb{H}\mathbb{h}$. Jeder dieser Keime ist dann mit den beiden Mikrouhren oben versehen, und hat eine isomorphe Einbettung der mikrokomplexen Ebene in die lokale Tangentialebene. Ob wir bei der Gleichzeitigkeit aller Mikrouhren über die Fläche bleiben oder ob die Zeit kontinuierlich oder diskret in kleinen Schritten variieren soll, ist noch offen. Im zweiten Fall würden wir räumlich verschiedene Nullzeiten einstellen.

8.3 Höhenlinien und Extrema via *Fluten*

Breitenkreise, Koordinatentransformation, Ebbe und Flut, Sintflut und Duerre, Urwald und Sam: *if you do that you go in jail.*

Weh DIR $X^\alpha J X^\alpha J$, wenn Jisroël das versucht:

Ein feste Burg ist UNSER GOTT: Eine Mauer um Jerusalem WEST mit $\Pi IPHOY$ß Weg zur KLAGEmauer, ohne Bomb und Pomp.

8.4 Kurven in der Raumzeit $\mathbb{H}\mathbb{h}$

Wir erweitern die Zeitachse $1\mathbb{R}$ von $\mathbb{H}$ zu einer Mikrokreisspirale

$$\tau = \tau(t, dt) = t + dt e^{\jmath t} \imath : \mathbb{R} \to \mathbb{R} + \imath\mathbb{R} + \jmath\mathbb{R} \subset \mathbb{H}\mathbb{h}.$$

Eine (Raum-)Kurve $s = s(t) : \mathbb{R} \to \Im\mathbb{H} = \mathbf{i}\,\mathbb{R} + \mathbf{j}\,\mathbb{R} + \mathbf{k}\,\mathbb{R}$ kann mikrospiralig umgeben werden als

$$s(t, dt, z) = s(t) + ds(t, dt) \cdot \rho(t) e^{\jmath t} \imath : \mathbb{R}^2 \to \Im\mathbb{H}\mathbb{h},$$

$\rho(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bewirkt bei Multiplikation eine Ähnlichkeit ausgehend vom Mikrokreis $e^{\jmath t}\imath : \mathbb{R} \to \imath\mathbb{R}+\jmath\mathbb{R}$, mit Spiegelung für $\rho < 0$. Der gedehnt-gespiegelte Mikrokreis steht im Raum $\Im\mathbb{H}\mathbb{h}$ senkrecht zur Minitangente $ds(t, dt)$.

8.5 Flächen und Mannigfaltigkeiten

Chapter 9

Höherdimensionale Vektoralgebren

Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\mathbb{Q}, \mathbb{H}\}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_0\mathbb{K} &= \mathbb{K}[\mathbf{e}_0] = \mathbb{K}[1] = \mathbb{K},\ \text{insbesondere}\\
\mathbb{A}_0 &= \mathbb{R}[\mathbf{e}_0] = \mathbb{R},\ \mathbb{A}_0\mathbb{Q} = \mathbb{Q}[1] = \mathbb{Q}.\\
\mathbb{A}_1\mathbb{K} &= \mathbb{K}[\mathbf{e}_1]/(\mathbf{e}_1^2 = -1) = \mathbb{K}[\mathbf{i}]/(\mathbf{i}^2 = -1)\\
&= \mathbb{K} + \mathbf{i}\,\mathbb{K} \text{ als 2-dim } \mathbb{K} \text{ Vektorraum,}\\
&\quad \text{insbesondere } \mathbb{A}_1\mathbb{R} = \mathbb{C},\ \mathbb{A}_1\mathbb{Q} = \mathbb{C}\mathbb{Q} = \mathbb{Q} + \mathbf{i}\,\mathbb{Q};\\
\mathbb{A}_2\mathbb{K} &= \mathbb{A}_1\mathbb{K}[\mathbf{e}_2]/(\mathbf{e}_2^2 = -1 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2,\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\\
&= \mathbb{K}[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]/\\
&\quad (\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1,\\
&\quad \mathbf{k} = \mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1,\\
&\quad \mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i} = -\mathbf{j}\mathbf{k}, \mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k} = -\mathbf{i}\mathbf{j})\\
&= \mathbb{H}\mathbb{K} \cong \mathbb{K}^4,\ \text{Quaternionen, insbesondere}\\
\mathbb{H}\mathbb{R} &= \mathbb{H},\ \mathbb{H}\mathbb{Q} = \mathbb{Q} + \mathbf{i}\,\mathbb{Q} + \mathbf{j}\,\mathbb{Q} + \mathbf{k}\,\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^4,\\
\mathbb{H}\mathbb{Z} &= \mathbb{Z} + \mathbf{i}\,\mathbb{Z} + \mathbf{j}\,\mathbb{Z} + \mathbf{k}\,\mathbb{Z}\ \textit{Gaussquaternionen}\\
\mathbb{H}\mathbb{N} &\subset \mathbb{H}\mathbb{Z} \subset \mathbb{H}\mathbb{Q}\\
&\quad \textit{natürliche Quaternionen,}\ \text{Halbalgebra,}\\
\mathbb{H}\mathbb{H} &\cong \mathbb{R}^{4\cdot 4}\ \textit{Quaternionquaternionen, Hexionen;}\\
\mathbb{A}_3\mathbb{K} &= \mathbb{A}_2\mathbb{K}[\mathbf{e}_3]/\\
&\quad (\mathbf{e}_3^2 = -1,\\
&\quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\\
&\quad \text{Oktonionen}
\end{aligned}
$$

(Basically) antikommutative Divisionsalgebren, jedoch Oktonionen und Hexionen mit Nullteilern, darunter $\mathbb{HQ}, \mathbb{HR}$ (einzige) Schiefkörper, abgesehen von

$$\mathbb{HN}_p = \mathbb{HZ}_p = \mathbb{HZ}/(p), \; p \text{ prim.}$$

Weiter rekursiv:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_m\mathbb{K} &= \mathbb{A}_{m-1}\mathbb{K}[\mathbf{e}_m]/ \\
&\quad (\mathbf{e}_m^2 = -1, [\mathbf{e}_m \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_i \mathbf{e}_m]_{i=1}^{m-1}) \\
&= \mathbb{K} + \mathbf{e}_1\mathbb{K} + \mathbf{e}_2\mathbb{K} + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbb{K} \\
&\quad + \mathbf{e}_3\mathbb{K} + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbb{K} + \mathbf{e}_1\mathbb{K}\mathbf{e}_3\mathbb{K} \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + \mathbf{e}_m\mathbb{K} + \mathbf{e}_m\mathbf{e}_{m-1}\mathbb{K} + ee_{m-2}\mathbf{e}_m \\
&\quad\quad + \ldots + (-1)^m \mathbf{e}_m\mathbf{e}_1\mathbb{K} \\
&\cong \mathbb{K}^{2^m}, \; 2^m \textit{ionen,} \\
&\quad \text{insbesondere} \\
\mathbb{A}_1\mathbb{K} &= \mathbb{CK} = \mathbb{K} + \mathbf{i}\,\mathbb{K} \cong \mathbb{K}^2, \\
\mathbb{A}_2\mathbb{K} &= \mathbb{HK} = \mathbb{K} + \mathbf{i}\,\mathbb{K} + \mathbf{j}\,\mathbb{K} + \mathbf{k}\,\mathbb{K} \cong \mathbb{K}^4 \text{ (Quater(n)ionen).} \\
\\
\mathbb{E} &= \mathbb{A}_\infty\mathbb{K} = \cup_m \mathbb{A}_m\mathbb{K}
\end{aligned}$$

quaternionisch strukturierter *Banachraum.*

9.1 Hochdimensionale quaternionische Optimierungsprobleme

Über Semiring $\mathbb{N}.\{0,1\}^*$ binäre positive rationale Zahlen.

9.2 Optimierungsprobleme mit smallness

Chapter 10

Quaternionen Differentialgleichungen

SPÄTER, reizvoll, ich habe davon wenig Ahnung.

Besonders interessant für mannigfache Anwendungen in Physik und Ingenieurwesen: Verzögerte Dgln.