Suite V - Die den Weg Weisende

Teil 3: Essays 338-346

$\Box$ tunnelt rechts/links auf Q.

R ist ana1 von $q, \Box$ mit $\Box$ Algebra in A.

`rf1`$q\Box$ mit $\Box$ Algebra in A.

$\overset{\mathsf{fin}}{q, x}$.

$\overset{\mathsf{fin}}{q, \Box}$ mit $\Box$ Algebra in A.

Maßtheorie: $\Box$_Gewicht. Mengenring.

MSC2010: 11B99. 28A05. 08A99.

Andreas Unterreiter

30. September 2016

Analysis: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$, $n \in \mathsf{dom}\,R$ und R ist **ana1** von q, x.

Ersterstellung: 30/04/15 **Letzte Änderung: 05/05/15**

338-1. Die Spur des Banalen wird immer wieder sichtbar.

338-1(Satz)

Aus "x, y Zahl" und "$x \neq y$" folgt "$1 + x \neq 1 + y$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **338-1** `VS` gleich $(x, y \text{ Zahl}) \wedge (x \neq y)$.

`1`: Es gilt: $(1 + x = 1 + y) \vee (1 + x \neq 1 + y)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 + x = 1 + y$.

`2`: Aus `1.1.Fall` folgt: $-1 + (1 + x) = -1 + (1 + y)$.

`3.1`: Aus `VS` gleich "$x \ldots$ Zahl$\ldots$" folgt via **300-5**: $-1 + (1 + x) = x$.

`3.2`: Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl$\ldots$" folgt via **300-5**: $-1 + (1 + y) = y$.

`4`: Aus `2`, aus `3.1` und aus `3.2` folgt: $x = y$.

`5`: Nach `VS` gilt: $x \neq y$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 + x \neq 1 + y$.

□

338-2. Da es sich bei $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, *nicht* um Mengen handelt, kann zum Beweis *nicht* auf Rekursionen zurück gegriffen werden.

338-2(Satz)

a) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$n < m$" *folgt* "$\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{-1+m}$".

b) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$n < m$" *folgt* "$\mathcal{U}_n \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$".

c) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$n < m$" *folgt* "$\mathcal{U}_{1+n} \cap (\mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) = 0$".

d) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$n < m$"
folgt "$(\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$".

e) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$n < m$" *folgt* "$(\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n) \cap (\mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) = 0$".

f) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$n \neq m$"
folgt "$(\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$".

g) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$n \neq m$" *folgt* "$(\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n) \cap (\mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) = 0$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **338-2** a) VS gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$.

1: Aus VS gleich "$n, m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots n < m$"
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $n \leq -1 + m$.

2: Aus 1"$n \leq -1 + m$" und
aus VS gleich "$n, m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **307-2**: $-1 + m \in \mathbb{N}$.

3: Aus VS gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$",
aus 2"$-1 + m \in \mathbb{N}$" und
aus 1"$n \leq -1 + m$"
folgt via **296-6**: $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{-1+m}$.

<u>Beweis **338-2**</u> `b)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{-1+m}$.

`2:` Aus `1`"$\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{-1+m}$"
folgt via **313-3**: $\mathcal{U}_n \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$.

`c)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n, m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + n, 1 + m \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n < m$"
folgt via **160-11**: $1 + n < 1 + m$.

`2:` Aus `1.1`"$1 + n, 1 + m \in \mathbb{N}$" und
aus `1.2`"$1 + n < 1 + m$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathcal{U}_{1+n} \cap (\mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+m)}) = 0$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **297-4**: $-1 + (1 + m) = n$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\mathcal{U}_{1+n} \cap (\mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) = 0$.

`d)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathcal{U}_n \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$.

`2:` Via **5-5** gilt: $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \subseteq \mathcal{U}_n$.

`3:` Aus `2`"$\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \subseteq \mathcal{U}_n$" und
aus `1`"$\mathcal{U}_n \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$"
folgt via **161-2**: $(\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$.

Beweis **338-2** `e)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathcal{U}_{1+n} \cap (\mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) = 0$.

`2:` Via **5-5** gilt: $\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n}$.

`3:` Aus `2`"$\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{1+n}$" und
aus `1`"$\mathcal{U}_{1+n} \cap (\mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) = 0$"
folgt via **161-2**: $(\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n) \cap (\mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) = 0$.

`f)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n \neq m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n, m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $n, m \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$n, m \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $(n < m) \vee (n = m) \vee (m < n)$.

`3:` Aus `2` und
aus `VS` gleich "$\ldots n \neq m$" folgt: $(n < m) \vee (m < n)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $n < m$.

Aus `VS` gleich "$n, m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `3.1.Fall`"$n < m$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$.

`3.2.Fall` $m < n$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `3.2.Fall`"$m < n$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$(\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) = 0$.

`5:` Via **KG**$\cap$:
$(\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) = (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m})$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $(\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$.

<u>Beweis **338-2**</u> `g)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n \neq m)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n, m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: n, m Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n, m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1+n, 1+m \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.1`"n, m Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \neq m$"
folgt via **338-1**: $1+n \neq 1+m$.

`3:` Aus `1.2`"$1+n, 1+m \in \mathbb{N}$" und
aus `2`"$1+n \neq 1+m$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`:
$$(\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+n)}) \cap (\mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+m)}) = 0.$$

`4.1:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **297-4**: $-1+(1+n) = n$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **297-4**: $-1+(1+m) = m$.

`5:` Aus `3`,
aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n) \cap (\mathcal{U}_{1+m} \setminus \mathcal{U}_m) = 0$.

□

338-3. In induktiver Weise soll $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ nachgewiesen werden. Dazu wird eine Klasse benötigt, in der induktiv gearbeitet werden soll.

338-3(Definition)

$$\mathsf{338.0}(x,y) = \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\mathsf{dom}\,(y(\omega)) \subseteq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}.$$

`RECH`-**Notation**.

338-4. Das “Element-Sein” in $\mathsf{338.0}(x,y)$ ist einfach verifizierbar.

<u>**338-4(Satz)**</u> *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $w \in \mathsf{338.0}(x,y)$.

`ii)` “$w \in x$” *und* “$\mathsf{dom}\,(y(w)) \subseteq \mathcal{U}_w \setminus \mathcal{U}_{-1+w}$” .

$\mathsf{338.0}(x,y) = \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\mathsf{dom}\,(y(\omega)) \subseteq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$.
<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **338-4**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $w \in \mathsf{338.0}(x,y)$.

Aus `VS` gleich “$w \in \mathsf{338.0}(x,y)$ ”
folgt via **338-3(Def)**: $(w \in x) \wedge (\mathsf{dom}\,(y(w)) \subseteq \mathcal{U}_w \setminus \mathcal{U}_{-1+w})$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(w \in x) \wedge (\mathsf{dom}\,(y(w)) \subseteq \mathcal{U}_w \setminus \mathcal{U}_{-1+w})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$w \in x \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`2:` Aus `VS` gleich “$(w \in x) \wedge (\mathsf{dom}\,(y(w)) \subseteq \mathcal{U}_w \setminus \mathcal{U}_{-1+w})$” und
aus `1`“w Menge”
folgt via **338-3(Def)**: $w \in \mathsf{338.0}(x,y)$.

□

338-5. Falls $1 + x \in 1 + n \in \mathbb{N}$ mit $x \in \mathbb{N}$, dann $x = -1 + n$ oder $x \in -1 + n$. Wegen Unannehmlichkeiten im Fall $1 + x = 0$ - also $x = -1$ - muss hier $x \in \mathbb{N}$ voraus gesetzt werden.

338-5(Satz)

a) *Aus* "$x \in n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$x = -1 + n$" *oder* "$x \in -1 + n$".

b) *Aus* "$0 \neq 1 + x \in \mathbb{N}$" *folgt* "$x \in \mathbb{N}$".

c) *Aus* "$x \in n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$x \subset n$".

d) *Aus* "$1 + x \in 1 + n \in \mathbb{N}$" *und* "$x \in \mathbb{N}$"
folgt "$x = -1 + n$" *oder* "$x \in -1 + n$".

RECH-**Notation**.

Beweis **338-5**

$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **338-5**</u> `a)` `VS` gleich $x \in n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in n \ldots$"
folgt via **folk**: $0 \neq n$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in n \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (0 \leq x \leq -1+n)$.

`3:` Aus 2"$\ldots x \leq -1+n$"
folgt via **41-5**: $(x = -1+n) \vee (x < -1+n)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x = -1+n$.

`3.2.Fall` $x < -1+n$.

`4:` Aus 1"$0 \neq n$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $-1+n \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus 2"$x \in \mathbb{N} \ldots$",
aus 4"$-1+n \in \mathbb{N}$" und
aus `3.2.Fall`"$x < -1+n$"
folgt via **197-5**: $x \in -1+n$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x = -1+n) \vee (x \in -1+n)$.

`b)` `VS` gleich $0 \neq 1+x \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq 1+x \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $-1+(1+x) \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1+x \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1+x$ Menge.

`3:` Aus 2"$1+x$ Menge"
folgt via **96-13**: x Zahl.

`4:` Aus 3"x Zahl"
folgt via **300-5**: $-1+(1+x) = x$.

`5:` Aus 4 und
aus 1
folgt: $x \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis **338-5**</u> `c)` `VS` gleich $x \in n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in n \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < n)$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{N} \dots$",
aus `VS` gleich "$\dots n \in \mathbb{N}$" und
aus `1`"$\dots x < n$"
folgt via **197-5**: $x \subset n$.

`d)` `VS` gleich $(1 + x \in 1 + n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$1 + x \in 1 + n \dots$"
folgt via **folk**: $0 \neq 1 + n$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq 1 + n$" und
aus `VS` gleich "$\dots 1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $n \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$1 + x \in 1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(1 + x = -1 + (1 + n)) \vee (1 + x \in -1 + (1 + n)).$$

`4:` Aus `2`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-4**: $-1 + (1 + n) = n$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $(1 + x = n) \vee (1 + x \in n)$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $1 + x = n$.

`6:` Aus `VS` gleich "$1 + x \in 1 + n \dots$"
folgt via **ElementAxiom**: $1 + x$ Menge.

`7:` Aus `6`"$1 + x$ Menge"
folgt via **96-13**: x Zahl.

`8:` Aus `5.1.Fall`"$1 + x = n$" und
aus `7`"x Zahl"
folgt via **307-1**: $x = -1 + n$.

...

<u>Beweis **338-5**</u> `d) VS` gleich $(1+x\in 1+n)\wedge(x\in\mathbb{N})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.2.Fall` $1+x\in n$.

`6:` Aus `5.2.Fall`"$1+x\in n$" und
aus `2`"$n\in\mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $1+x\le -1+n$.

`7:` Aus `6`"$1+x\le -1+n$" und
aus $\in$**schola**"$1\in\mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $x\le -1+(-1+n)$.

`8:` Aus `2`"$n\in\mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $n\in\mathbb{R}$.

`9:` Aus $\in$**schola**"$-1\in\mathbb{R}$" und
aus `8`"$n\in\mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $-1+n\in\mathbb{R}$.

`10:` Aus `9`"$-1+n\in\mathbb{R}$" und
aus $<$**schola**"$-1<0$"
folgt via **165-2**: $(-1+n)+(-1)<-1+n$.

`11.1:` Via **FSA** gilt: $-1+(-1+n)=(-1+n)+(-1)$.

`11.2:` Aus `5.2.Fall`"$1+x\in\mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $0\neq n$.

`12.1:` Aus `11.1` und
aus `10`
folgt: $-1+(-1+n)<-1+n$.

`12.2:` Aus `11.2`"$0\neq n$" und
aus `2`"$n\in\mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $-1+n\in\mathbb{N}$.

`13:` Aus `7`"$x\le -1+(-1+n)$" und
aus `12.1`"$-1+(-1+n)<-1+n$"
folgt via **folk**: $x<-1+n$.

`14:` Aus `VS` gleich "$\ldots x\in\mathbb{N}$",
aus `13`"$-1+n\in\mathbb{N}$" und
aus `13`"$x<-1+n$"
folgt via **197-5**: $x\in -1+n$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$(x=-1+n)\vee(x\in -1+n)$.

□

338-6. Falls $\mathsf{dom}\,(x(p)) \subseteq y \neq \mathcal{U}$, dann $p \in \mathsf{dom}\,x$. Auch gilt $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \neq \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$.

338-6(Satz)

a) *Aus* “$\mathsf{dom}\,(x(p)) \subseteq y \neq \mathcal{U}$”*, dann* “$p \in \mathsf{dom}\,x$”.

b) *Aus* “$\mathsf{ran}\,(x(p)) \subseteq y \neq \mathcal{U}$”*, dann* “$p \in \mathsf{dom}\,x$”.

c) $\neg(\mathcal{U} \subset x)$.

d) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$” *folgt* “$\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \neq \mathcal{U}$”.

e) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$” *und* “$\mathsf{dom}\,(x(p)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$” *folgt* “$p \in \mathsf{dom}\,x$”.

f) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$” *und* “$\mathsf{ran}\,(x(p)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$” *folgt* “$p \in \mathsf{dom}\,x$”.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **338-6** `a)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\,(x(p)) \subseteq y \neq \mathcal{U}$.

`1:` Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\,x) \vee (p \notin \mathsf{dom}\,x)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\,x$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$p \notin \mathsf{dom}\,x$” folgt via **folk**: $x(p) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2` und aus **folk**“$\mathsf{dom}\,\mathcal{U} = \mathcal{U}$” folgt: $\mathsf{dom}\,(x(p)) = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` und aus `VS` folgt: $\mathcal{U} \subseteq y \neq \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4`“$\mathcal{U} \subseteq y \ldots$” folgt via **folk**: $y = \mathcal{U}$.

`6:` Aus `5` und aus `4` folgt: $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \in \mathsf{dom}\,x$.

Beweis **338-6** `b)` `VS` gleich $\mathsf{ran}\,(x(p)) \subseteq y \neq \mathcal{U}.$

`1:` Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\,x) \vee (p \notin \mathsf{dom}\,x).$

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\,x.$

`2:` Aus `1.1.Fall`"$p \notin \mathsf{dom}\,x$" folgt via **folk**: $x(p) = \mathcal{U}.$

`3:` Aus `2` und aus **folk**"$\mathsf{ran}\,\mathcal{U} = \mathcal{U}$" folgt: $\mathsf{ran}\,(x(p)) = \mathcal{U}.$

`4:` Aus `3` und aus `VS` folgt: $\mathcal{U} \subseteq y \neq \mathcal{U}.$

`5:` Aus `4`"$\mathcal{U} \subseteq y \ldots$" folgt via **folk**: $y = \mathcal{U}.$

`6:` Aus `5` und aus `4` folgt: $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}.$

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \in \mathsf{dom}\,x.$

`c)`

`1:` Es gilt: $(\mathcal{U} \subset x) \vee (\neg(\mathcal{U} \subset x)).$

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathcal{U} \subset x.$

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\mathcal{U} \subset x$" folgt via **57-1(Def)**: $(\mathcal{U} \subseteq x) \wedge (\mathcal{U} \neq x).$

`3:` Aus `2`"$\mathcal{U} \subseteq x$" folgt via **folk**: $x = \mathcal{U}.$

`4:` Aus `3` und aus `2`"$\ldots\mathcal{U} \neq x$" folgt: $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}.$

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(\mathcal{U} \subset x).$

Beweis **338-6** `d)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Es gilt: $(\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} = \mathcal{U}) \vee (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \neq \mathcal{U})$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} = \mathcal{U}$"
folgt via **298-11**: $(\mathcal{U}_n = \mathcal{U}) \wedge (\mathcal{U}_{-1+n} = 0)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **240-17**: $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{1+n}$.

`4:` Aus `2`"$\mathcal{U}_n = \mathcal{U} \ldots$" und
aus `3`
folgt: $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{1+n}$.

`5:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\neg(\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{1+n})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \neq \mathcal{U}$.

`e)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{dom}\,(x(p)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,(x(p)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$" und
aus `1`"$\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \neq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \in \mathsf{dom}\,x$.

`f)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{ran}\,(x(p)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\,(x(p)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$" und
aus `1`"$\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \neq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \in \mathsf{dom}\,x$.

□

338-7. Ist R **ana1** von q, x, so kann unter Umständen von $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ auf $\mathsf{dom}\,(R(1+n)) \subseteq \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$ geschlossen werden.

338-7(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ *R ist* **ana1** *von q, x.*

$\rightarrow)$ *$n \in \mathbb{N}$.*

$\rightarrow)$ *$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$.*

$\rightarrow)$ *$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.*

Dann folgt "$\mathsf{dom}\,(R(1+n)) \subseteq \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **338-7**

$$337.0(x, y) \; = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$$

1: Aus $\rightarrow)$ "$n \in \mathbb{N}$" und
aus $\rightarrow)$ "$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt via **338-6**: $n \in \mathsf{dom}\, R$.

2: Aus $\rightarrow)$ "R ist **ana1** von q, x",
aus 1 "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus $\rightarrow)$ "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **337-3(Def)**:
$$R(1+n) = 337.0(R(n), x)\,.$$

...

Beweis **338-7** . . .

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $\qquad \alpha \in \mathsf{dom}\,(R(1+n))$.

`4:` Aus `Thema3`“ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(R(1+n))$ ”
folgt via **folk**: $\exists\Omega : (\alpha, \Omega) \in R(1+n)$.

`5:` Aus `4`“ $\ldots(\alpha, \Omega) \in R(1+n)$ ” und
aus `2`
folgt: $(\alpha, \Omega) \in \mathsf{337.0}(R(n), x)$.

`6:` Aus `5`“ $(\alpha, \Omega) \in \mathsf{337.0}(R(n), x)$ ”
folgt via **337-2**: $\exists\Gamma, \Phi, \Psi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Gamma) \in R(n))$
$\wedge(((\Gamma, \Phi), \Omega) \in x) \wedge (\alpha = \{\Phi\} \cup \Psi)$.

`7.1:` Aus `6`“ $\ldots(\Psi, \Gamma) \in R(n)\ldots$ ”
folgt via **folk**: $\Psi \in \mathsf{dom}\,(R(n))$.

`7.2:` Aus `6`“ $\ldots((\Gamma, \Phi), \Omega) \in x\ldots$ ”
folgt via **folk**: (Γ, Φ) Menge.

`8.1:` Aus `7.1`“ $\Psi \in \mathsf{dom}\,(R(n))$ ” und
aus →)“ $R(n) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ ”
folgt via **0-4**: $\Psi \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`8.2:` Aus `7.2`“ (Γ, Φ) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: Φ Menge.

`9:` Aus →)“ $n \in \mathbb{N}$ ”,
aus `6`“ $\ldots\Phi \notin \Psi\ldots$ ”,
aus `8.1`“ $\Psi \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ ” und
aus `8.2`“ Φ Menge”
folgt via **300-6**: $\{\Phi\} \cup \Psi \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

`10:` Aus `9` und
aus `6`“ $\ldots\alpha = \{\Phi\} \cup \Psi$ ”
folgt: $\alpha \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$

Ergo `Thema3`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(R(1+n))) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{dom}\,(R(1+n)) \subseteq \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

□

338-8. Als intelektuelle Erfrischung werden einige Aussagen der Zahlentheorie eingeschoben.

338-8(Satz)

a) *Aus* "$x \in n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$x \subseteq n$" *und* "$x \in \mathbb{N}$" *und* "$x \subseteq \mathbb{N}$".

b) *Aus* "$y \in x \in n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$y \subseteq x$" *und* "$y \in n$" *und* "$y \subseteq n$" *und* "$y \in \mathbb{N}$" *und* "$y \subseteq \mathbb{N}$".

c) *Aus* "$x \in n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *folgt* "$x \subseteq n$" *und* "$x \in \mathbb{N}$ *und* "$x \subseteq \mathbb{N}$".

d) *Aus* "$y \in x \in n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *folgt* "$y \subseteq x$" *und* "$y \in n$" *und* "$y \subseteq n$" *und* "$y \in \mathbb{N}$" *und* "$y \subseteq \mathbb{N}$".

e) *Aus* "$m < n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$" *folgt* "$m \in n$".

$\leq$-Notation.

Beweis **338-8** a) VS gleich $x \in n \in \mathbb{N}$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $n \subseteq \mathbb{N}$.

1.2: Aus VS gleich "$x \in n \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $x < n$.

2: Aus VS gleich "$x \in n \ldots$" und
aus 1.1 "$n \subseteq \mathbb{N}$"

folgt via **0-4**: $\boxed{x \in \mathbb{N}}$

3.1: Aus 2 "$x \in \mathbb{N}$",
aus VS gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$" und
aus 1.2 "$x < n$"

folgt via **197-5**: $\boxed{x \subseteq n}$

3.2: Aus 2 "$x \in \mathbb{N}$"

folgt via **197-4**: $\boxed{x \subseteq \mathbb{N}}$

<u>Beweis **338-8**</u> `b)` `VS` gleich $y \in x \in n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x \subseteq n) \wedge (x \in \mathbb{N}) \wedge (x \subseteq \mathbb{N})$.

`2:` Aus `VS` gleich "$y \in x \ldots$" und
aus `1` "$\ldots x \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{(y \subseteq x) \wedge (y \in \mathbb{N}) \wedge (y \subseteq \mathbb{N})}$

`3.1:` Aus `VS` gleich "$y \in x \ldots$" und
aus `1` "$x \subseteq n \ldots$"
folgt via **0-4**: $\boxed{y \in n}$

`3.2:` Aus `2` "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1` "$x \subseteq n \ldots$"
folgt via **folk**: $\boxed{y \subseteq n}$

Beweis **338-8** `c)` `VS` gleich $x \in n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $(n = \mathbb{N}) \vee (n \in \mathbb{N}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = \mathbb{N}.$

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in n \ldots$" und
aus `1.1.Fall`
folgt: $x \in \mathbb{N}.$

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $x \subseteq \mathbb{N}.$

`4:` Aus `3` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $x \subseteq n.$

`5:` Aus `4`,
aus `2` und
aus `3`
folgt: $(x \subseteq n) \wedge (x \in \mathbb{N}) \wedge (x \subseteq \mathbb{N}).$

`1.2.Fall` $n \in \mathbb{N}.$

Aus `VS` gleich "$x \in n \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x \subseteq n) \wedge (x \in \mathbb{N}) \wedge (x \subseteq \mathbb{N}).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x \subseteq n) \wedge (x \in \mathbb{N}) \wedge (x \subseteq \mathbb{N}).$

<u>Beweis</u> **338-8** `d)` `VS` gleich $y \in x \in n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $(n = \mathbb{N}) \vee (n \in \mathbb{N}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = \mathbb{N}.$

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in n \ldots$" und
aus `1.1.Fall`
folgt: $x \in \mathbb{N}.$

`3:` Aus `VS` gleich "$y \in x \ldots$" und
aus `2`"$x \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(y \subseteq x) \wedge (y \in \mathbb{N}) \wedge (y \subseteq \mathbb{N}).$

`4:` Aus `3`"$\ldots (y \in \mathbb{N}) \wedge (y \subseteq \mathbb{N})$" und
aus `1.1.Fall`
folgt: $(y \in n) \wedge (y \subseteq n).$

`5:` Aus `3`"$y \subseteq x \ldots$",
aus `4` und
aus `3`"$\ldots (y \in \mathbb{N}) \wedge (y \subseteq \mathbb{N})$"
folgt: $(y \subseteq x) \wedge (y \in n) \wedge (y \subseteq n) \wedge (y \in \mathbb{N}) \wedge (y \subseteq \mathbb{N}).$

`1.2.Fall` $n \in \mathbb{N}.$

Aus `VS` gleich "$y \in x \in n \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$(y \subseteq x) \wedge (y \in n) \wedge (y \subseteq n) \wedge (y \in \mathbb{N}) \wedge (y \subseteq \mathbb{N}).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(y \subseteq x) \wedge (y \in n) \wedge (y \subseteq n) \wedge (y \in \mathbb{N}) \wedge (y \subseteq \mathbb{N}).$

Beweis **338-8** `e)` `VS` gleich $(m < n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $(n = \mathbb{N}) \vee (n \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = \mathbb{N}$.

Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N}$" und
aus `1.1.Fall`
folgt: $m \in n$.

`1.2.Fall` $n \in \mathbb{N}$.

Aus `VS` gleich "$m < n \ldots$",
aus `1.2.Fall`"$n \in \mathbb{N}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-5**: $m \in n$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $m \in n$.

$\square$

338-9. Dieser Essay beinhaltet Verblüffendes neben Banalem.

338-9(Satz)

Aus “$y \in x \in n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$” *folgt* “$1 + y \in n$”.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **338-9** `VS` gleich $y \in x \in n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

$\leq$-**Notation**.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **folk**: $(n = \mathbb{N}) \vee (n \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \in n \ldots$” und
aus `1.1.Fall`
folgt: $n \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \in n \ldots$” und
aus `2`“$n \in \mathbb{N}$”
folgt via **307-2**: $x \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `VS` gleich “$y \in x \ldots$” und
aus `3`“$x \in \mathbb{N}$”
folgt via **307-2**: $y \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus `4`“$y \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-10**: $1 + y \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus `5` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $1 + y \in n$.

...

<u>Beweis **338-9**</u> `VS` gleich $y \in x \in n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $n \in \mathbb{N}$:

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in n \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $x \in \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in n \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $x < n$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$y \in x \ldots$" und
aus `2.1`"$x \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $y \in \mathbb{N}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$y \in x \ldots$" und
aus `2.1`"$x \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $y < x$.

`4.1:` Aus `3.1`"$y \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + y \in \mathbb{N}$.

`4.2:` Aus `3.1`"$y \in \mathbb{N}$",
aus `2.1`"$x \in \mathbb{N}$" und
aus `3.2`"$y < x$"
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $1 + y \leq x$.

`5:` Aus `4.2`"$1 + y \leq x$" und
aus `2.2`"$x < n$"
folgt via **folk**: $1 + y < n$.

`6:` Aus `4.1`"$1 + y \in \mathbb{N}$",
aus `1.2.Fall`"$n \in \mathbb{N}$" und
aus `5`"$1 + y < n$"
folgt via **197-5**: $1 + y \in n$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt. $1 + y \in n$.

□

338-10. Das Thema von **338-5** `a)` wird ausgearbeitet.

338-10(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in n \in \mathbb{N}$.

`ii)` "$0 \neq n \in \mathbb{N}$" *und* "$(x = -1 + n) \vee (x \in -1 + n)$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **338-10** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \in n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in n \dots$"

folgt via **folk**: $\boxed{0 \neq n}$

`1.2:` Nach `VS` gilt: $\boxed{n \in \mathbb{N}}$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$x \in n \in \mathbb{N}$"

folgt via **338-5**: $\boxed{(x = -1 + n) \vee (x \in -1 + n)}$

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(0 \neq n \in \mathbb{N}) \wedge ((x = -1 + n) \vee (x \in -1 + n))$.

`1.1:` Nach `VS` gilt: $\boxed{n \in \mathbb{N}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq n \in \mathbb{N} \dots$"
folgt via **307-2**: $-1 + n \in n$.

`2:` Nach `VS` gilt: $(x = -1 + n) \vee (x \in -1 + n)$.
`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = -1 + n$.
Aus `1.2` und
aus `2.1.Fall`
folgt: $x \in n$.

`1.2.Fall` $x \in -1 + n$.
Aus `1.2.Fall` "$x \in -1 + n$" und
aus `1.2` "$-1 + n \in n$" und
aus `VS` gleich "$\dots n \in \mathbb{N} \dots$"
folgt via **338-8**: $x \in n$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{x \in n}$

□

338-11. Mit **338-10** kann `d)` von **338-5** auf ansprechende Form gebracht werden.

338-11(Satz) *Es gelte:*

→) $1 + x \in 1 + n \in \mathbb{N}$.

→) $x \in \mathbb{N}$.

Dann folgt:

`a)` $0 \neq n \in \mathbb{N}$.

`b)` $x \in n \in \mathbb{N}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **338-11**

$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **338-11**</u> `a)`

`1:` Es gilt: $(n=0) \vee (0 \neq n)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$1+x \in 1+n$" und
aus `1.1.Fall`
folgt: $1+x \in 1+0$.

`3:` Aus `2` und
aus +**schola**"$1+0=1$"
folgt: $1+x \in 1$.

`4:` Aus `3` und
aus **95-1(Def)**"$1=\{0\}$"
folgt: $1+x \in \{0\}$.

`5:` Aus `4`"$1+x \in \{0\}$"
folgt via **folk**: $1+x=0$.

`6:` Aus →)"$x \in \mathbb{N}$"
folgt via **199-2**: $0 < 1+x$.

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $0 < 0$.

`8:` Via **41-5** gilt: $\neg(0 < 0)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$0 \neq n$"

`2.1:` Aus →)"$1+x \in 1+n \ldots$"
folgt via **folk**: $0 \neq 1+n$.

`2.2:` Aus →)"$\ldots 1+n \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1+n$ Menge.

`3.1:` Aus `2.1.Fall`"$0 \neq 1+n$" und
aus →)"$\ldots 1+n \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $-1+(1+n) \in \mathbb{N}$.

`3.2:` Aus `2.2`"$1+n$ Menge"
folgt via **96-13**: n Zahl.

...

<u>Beweis **338-11**</u> `a)` ...

`4:` Aus `3.2`“n Zahl”
folgt via **300-5**: $-1+(1+n)=n.$

`5:` Aus `4` und
aus `3.1`
folgt: $\boxed{n\in\mathbb{N}}$

`b)`

`1.1:` Aus →) “$1+x\in 1+n\in\mathbb{N}$” und
aus →) “$x\in\mathbb{N}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0\neq n\in\mathbb{N}.$

`1.2:` Aus →) “$1+x\in 1+n\in\mathbb{N}$” und
aus →) “$x\in\mathbb{N}$”
folgt via **338-5**: $(x=-1+n)\vee(x\in -1+n).$

`2:` Aus `1.1`“$0\neq n\in\mathbb{N}$” und
aus `1.2`“$(x=-1+n)\vee(x\in -1+n)$”
folgt via **338-10**: $x\in n\in\mathbb{N}.$

□

338-12. Auf nicht ganz einfache Weise wird nun $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ für $n \in \mathsf{dom}\,R$ und R ist **ana1** von q, x, nachgewiesen.

338-12(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ *R ist* **ana1** *von q, x.*

$\rightarrow)$ *$n \in \mathsf{dom}\,R$.*

Dann folgt "$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **338-12**

$$\mathsf{338.0}(x, y) = \{\omega : (\omega \in x) \wedge (\mathsf{dom}\,(y(\omega)) \subseteq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}.$$

...

<u>Beweis</u> **338-12** ...

`1:` Aus →) "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus →) "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2` "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`4.1:` Aus →) "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`4.2:` Aus →) "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-4**: $0 \in \mathsf{dom}\, R$.

`5:` Via **259-36** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) \subseteq \{0\}$.

`6:` $$\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0} \overset{\textbf{+schola}}{=} \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1} \overset{\textbf{296-10(Def)}}{=} \mathcal{U}_0 \setminus 0 \overset{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U}_0 \overset{\textbf{240-2(RekParDef)}}{=} \{0\}.$$

`7:` Aus `5` und
aus `6` "$\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0} = \ldots = \{0\}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) \subseteq \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}$.

`8:` Aus `7` und
aus `4.1` "$R(0) = \{(0, q)\}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(R(0)) \subseteq \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}$.

`9:` Aus `4.2` "$0 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `8` "$\mathsf{dom}\,(R(0)) \subseteq \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}$"
folgt via **338-4**: $0 \in 338.0(\mathsf{dom}\, R, R)$.

...

Beweis **338-12** . . .

$\boxed{\texttt{Thema10}}$ $(\alpha \in 338.0(\mathsf{dom}\, R, R)\,) \wedge (1+\alpha \in 1+n).$

11: Aus Thema10"$\alpha \in 338.0(\mathsf{dom}\, R, R)$ . . ."
folgt via **338-3(Def)**:
$(\alpha \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (\mathsf{dom}\,(R(\alpha)) \subseteq \mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}).$

12: Aus 11"$\alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $\alpha \in \mathbb{N}.$

13: Aus Thema10". . . $1+\alpha \in 1+n$",
aus 3"$1+n \in \mathbb{N}$" und
aus 12"$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **338-11**: $\alpha \in n \in \mathbb{N}.$

14: Aus 13"$\alpha \in n$ . . .",
aus →)"$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **338-9**: $1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R.$

15: Aus →)"R ist **ana1** von q, x",
aus 12"$\alpha \in \mathbb{N}$",
aus 14"$1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 11". . . $\mathsf{dom}\,(R(\alpha)) \subseteq \mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}$"
folgt via **338-7**: $\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_\alpha.$

16: Aus 12"$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-4**: $-1+(1+\alpha) = \alpha.$

19: Aus 15 und
aus 16
folgt: $\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)}.$

20: Aus 14"$1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 19"$\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)}$"
folgt via **338-4**: $1+\alpha \in 338.0(\mathsf{dom}\, R, R)\,.$

Ergo Thema10:

A1	"$\forall \alpha : ((\alpha \in 338.0(\mathsf{dom}\, R, R)\,) \wedge (1+\alpha \in 1+n)) \Rightarrow (1+\alpha \in 338.0(\mathsf{dom}\, R, R)\,)$"

. . .

Beweis **338-12** . . .

11: Aus 3 “$1+n\in\mathbb{N}$”,
aus 9 “$0\in\mathsf{338.0}(\mathsf{dom}\,R,R)$” und
aus A1 gleich “$\forall\alpha:((\alpha\in\mathsf{338.0}(\mathsf{dom}\,R,R))\wedge(1+\alpha\in 1+n))$
$\Rightarrow(1+\alpha\in\mathsf{338.0}(\mathsf{dom}\,R,R))$”
folgt via **337-12**: $1+n\subseteq\mathsf{338.0}(\mathsf{dom}\,R,R)$.

12: Aus 2 “$n\in\mathbb{N}$”
folgt via **239-5**: $n\in 1+n$.

13: Aus 12 “$n\in 1+n$” und
aus 11 “$1+n\subseteq\mathsf{338.0}(\mathsf{dom}\,R,R)$”
folgt via **0-4**: $n\in\mathsf{338.0}(\mathsf{dom}\,R,R)$.

14: Aus 13 “$n\in\mathsf{338.0}(\mathsf{dom}\,R,R)$”
folgt via **338-3(Def)**: $\mathsf{dom}\,(R(n))\subseteq\mathcal{U}_n\setminus\mathcal{U}_{-1+n}$.

□

338-13. Ist R **ana1** von q, x, so sind die Definitions-Bereiche von R paarweise disjunkt.

338-13(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) R *ist* **ana1** *von* q, x.

$\rightarrow$) $n, m \in \mathsf{dom}\, R$.

$\rightarrow$) $n \neq m$.

Dann folgt "$(\mathsf{dom}\,(R(n))) \cap (\mathsf{dom}\,(R(m))) = 0$".

Beweis **338-13**

RECH-**Notation**.

1: Aus →) " R ist **ana1** von q, x "
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

2: Aus →) " $n, m \in \mathsf{dom}\, R$ " und
aus 1 " $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ "
folgt via **338-8**: $n, m \in \mathbb{N}$.

3: Aus 2 " $n, m \in \mathbb{N}$ " und
aus →) " $n \neq m$ "
folgt via **338-2**: $(\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$.

4.1: Aus →) " R ist **ana1** von q, x " und
aus →) " $n \ldots \in \mathsf{dom}\, R$ "
folgt via **338-12**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

4.2: Aus →) " R ist **ana1** von q, x " und
aus →) " $\ldots m \in \mathsf{dom}\, R$ "
folgt via **338-12**: $\mathsf{dom}\,(R(m)) \subseteq \mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}$.

5: Aus 4.1 " $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ " und
aus 4.2 " $\mathsf{dom}\,(R(m)) \subseteq \mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}$ "
folgt via **2-13**:
$(\mathsf{dom}\,(R(n))) \cap (\mathsf{dom}\,(R(m))) \subseteq (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m})$.

6: Aus 5 und
aus 3
folgt: $(\mathsf{dom}\,(R(n))) \cap (\mathsf{dom}\,(R(m))) \subseteq 0$.

7: Aus 6 " $(\mathsf{dom}\,(R(n))) \cap (\mathsf{dom}\,(R(m))) \subseteq 0$ "
folgt via **folk**: $(\mathsf{dom}\,(R(n)) \cap (\mathsf{dom}\,(R(m))) = 0$.

□

Analysis: Erste Funktions-Eigenschaften von `rf1`qx und R ist **ana1** von q, x.

Ersterstellung: 18/05/15 **Letzte Änderung: 19/05/15**

339-1. Beim unentwegten Sortierungs- und Re-Evaluierungsvorgang, der die Arbeit am LW begleitet, drängt sich die Voraussetzung $1 + x \in 1 + n \in \mathbb{N}$ in den Konzentrationspunkt.

339-1(Satz)

a) *Aus* "$1 + x \in \mathbb{N}$" *folgt* "$(1 + x = 0) \vee (x \in \mathbb{N})$".

b) *Aus* "$1 + x \in 1 + n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$(1 + x = 0) \vee (x \in n)$".

c) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$1 + x \in 1 + n$" *folgt* "$(1 + x = 0) \vee (x \in n)$".

RECH-**Notation**.

Beweis **339-1**

≤-Notation.

---

a) `VS` gleich $1 + x \in \mathbb{N}$.

`1:` Es gilt: $(1 + x = 0) \vee (0 \neq 1 + x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 + x = 0$.

`1.2.Fall` $0 \neq 1 + x$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq 1 + x$” und aus `VS` gleich “$1 + x \in \mathbb{N}$” folgt via **307-2**: $-1 + (1 + x) \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `VS` gleich “$1 + x \in \mathbb{N}$” folgt via **ElementAxiom**: $1 + x$ Menge.

`4:` Aus `3`“$1 + x$ Menge” folgt via **96-13**: x Zahl.

`5:` Aus `4`“x Zahl” folgt via **300-5**: $-1 + (1 + x) = x$.

`6:` Aus `5` und aus `2` folgt: $x \in \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(1 + x = 0) \vee (x \in \mathbb{N})$.

<u>Beweis **339-1**</u> `b)` `VS` gleich $1+x \in 1+n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$1+x \in 1+n \dots$"
folgt via **folk**: $0 \neq 1+n$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\dots 1+n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(1+n=0) \vee (n \in \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\boxed{n \in \mathbb{N}}$

`3:` Es gilt: $(1+x=0) \vee (0 \neq 1+x)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $1+x=0$.

`3.2.Fall` $0 \neq 1+x$.

`4:` Aus `VS` gleich "$1+x \in 1+n \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $1+x \in \mathbb{N}$.

`5.1:` Aus `3.2.Fall`"$0 \neq 1+x$" und
aus `4`"$1+x \in \mathbb{N}$"
folgt via **338-5**: $x \in \mathbb{N}$.

`5.2:` Aus `4`"$1+x \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\dots 1+n \in \mathbb{N}$" und
aus `VS` gleich "$1+x \in 1+n \dots$"
folgt via **197-5**: $1+x < 1+n$.

`6:` Aus `5.2`"$1+x < 1+n$"
folgt via **160-11**: $x < n$.

`7:` Aus `5.1`"$x \in \mathbb{N}$",
aus `2`"$n \in \mathbb{N}$" und
aus `6`"$x < n$"
folgt via **197-5**: $x \in n$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\boxed{(1+x=0) \vee (x \in n)}$$

Beweis **339-1** `c)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + x \in 1 + n)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1 + x \in 1 + n$" und
aus `1`"$1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(1 + x = 0) \vee (x \in n)$.

$\square$

339-2. Eine Möglichkeit, für $n \in \mathbb{N}$ auf $n \in x$ zu schließen besteht darin, $1 + n \subseteq x$ nachzuweisen und für *diesen* Nachweis auf **337-12** zurück zu greifen. Der Einsatz-Bereich dieses Umweges liegt bei der Untersuchung rekursiven Klassen mit Definitions-Bereichen in $\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

339-2(Satz) *Es gelte:*

→) $n \in \mathbb{N}$.

→) $0 \in x$.

→) $\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \in n)) \Rightarrow (1 + \alpha \in x)$.

Dann folgt:

a) $1 + n \subseteq x$.

b) $n \in x$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **339-2**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta \in x) \wedge (1 + \beta \in 1 + n)$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\ldots 1 + \beta \in 1 + n$" und
aus →) "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **339-1**: $(1 + \beta = 0) \vee (\beta \in n)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $1 + \beta = 0$.

Aus `2.1.Fall` "$1 + \beta = 0$" und
aus →) "$0 \in x$"
folgt: $1 + \beta \in x$.

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $\beta \in n$.

Aus `Thema1.1` "$\beta \in x \ldots$"
aus `2.2.Fall` "$\beta \in n$"
und aus →) "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \in n)) \Rightarrow (1 + \alpha \in x)$"
folgt: $1 + \beta \in x$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $1+\beta \in x$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \beta : ((\beta \in x) \wedge (1 + \beta \in 1 + n)) \Rightarrow (1 + \beta \in x)$"

`1.2:` Aus →) "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`2.a):` Aus `1.2` "$1 + n \in \mathbb{N}$",
aus →) "$0 \in x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in x) \wedge (1 + \beta \in 1 + n)) \Rightarrow (1 + \beta \in x)$"
folgt via **337-12**: $1 + n \subseteq x$.

`2.1:` Aus →) "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **239-5**: $n \in 1 + n$.

`3.b):` Aus `2.1` "$n \in 1 + n$" und
aus `2.a)` "$1 + n \subseteq x$"
folgt via **folk**: $n \in x$.

□

339-3. Zur Einstimmung in die Untersuchung, unter welchen Voraussetzungen $R(n)$, $n \in \mathsf{dom}\, R$ und R ist **ana1** von q, x, eine *Funktion* ist, werden zunächst kleine Brötchen gebacken.

339-3(Definition)

1) $\mathsf{339.0}(x) = \{\omega : x(\omega) \text{ Relation}\}$.

2) $\mathsf{339.1}(x) = \{\omega : x(\omega) \text{ Funktion}\}$.

339-4. Interessanter Weise ist das "Element-Sein" in $\mathsf{339.0}(x)$ nur an die definierende Eigenschaft und nicht an "Mengen-Artigkeit" gebunden. Die Äquivalenz von `ii)` und `iii)` hat ohne Bezug zu $\mathsf{339.0}(x)$ Bestand.

339-4(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathsf{339.0}(x)$.

`ii)` $x(p)$ *Relation.*

`iii)` "$x(p)$ *Relation*" *und* "$p, x(p)$ *Menge*" *und* "$p \in \mathsf{dom}\, x$" .

$\mathsf{339.0}(x) = \{\omega : x(\omega) \text{ Relation}\}$ **339-3(Def)**

<u>Beweis **339-4**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in \mathsf{339.0}(x)$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{339.0}(x)$ "
folgt via **339-3(Def)**: $x(p)$ Relation.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $x(p)$ Relation.

`1.1:` Nach `VS` gilt: $\boxed{x(p) \text{ Relation}}$

`1.2:` Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\, x) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, x)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **folk**: $x(p) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2 und
aus `VS`
folgt: $\mathcal{U}$ Relation.

`4:` Via **10-30** gilt: $\mathcal{U}$ keine Relation.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$p \in \mathsf{dom}\, x$ "

`2.1:` Aus `A1` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x$ "

folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `A1` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x$ "

folgt via **folk**: $\boxed{x(p) \text{ Menge}}$

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(x(p) \text{ Relation}) \wedge (p, x(p) \text{ Menge}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

Aus `VS` gleich "$x(p)$ Relation ... " und
aus `VS` gleich "... p ... Menge... "
folgt via **339-3(Def)**: $p \in \mathsf{339.0}(x)$.

□

339-5. Interessanter Weise ist das "Element-Sein" in $\mathsf{339.1}(x)$ nur an die definierende Eigenschaft und nicht an "Mengen-Artigkeit" gebunden. Die Äquivalenz von `ii)` und `iii)` hat ohne Bezug zu $\mathsf{339.1}(x)$ Bestand.

339-5(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathsf{339.1}(x)$.

`ii)` $x(p)$ *Funktion.*

`iii)` *"$x(p)$ Funktion" und "$p, x(p)$ Menge" und "$p \in \mathsf{dom}\, x$"* .

$\mathsf{339.1}(x) = \{\omega : x(\omega) \text{ Funktion}\}$ **339-3(Def)**

Beweis **339-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in \mathsf{339.1}(x)$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{339.1}(x)$"
folgt via **339-3(Def)**: $x(p)$ Funktion.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $x(p)$ Funktion.

`1.1:` Nach `VS` gilt: $\boxed{x(p) \text{ Funktion}}$

`1.2:` Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\, x) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, x)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **folk**: $x(p) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2` und
aus `VS`
folgt: $\mathcal{U}$ Funktion.

`4:` Via **18-51** gilt: $\mathcal{U}$ keine Funktion.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$p \in \mathsf{dom}\, x$"

`2.1:` Aus `A1` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `A1` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **folk**: $\boxed{x(p) \text{ Menge}}$

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(x(p) \text{ Funktion}) \wedge (p, x(p) \text{ Menge}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

Aus `VS` gleich "$x(p)$ Funktion ..." und
aus `VS` gleich "... p ... Menge..."
folgt via **339-3(Def)**: $p \in \mathsf{339.1}(x)$.

□

339-6. Handelt es sich bei R um **ana1** von q, x, so ist $R(0)$ stets eine Funktion. Im Speziellen ist $\mathtt{rf1}qx(0)$ eine Funktion.

339-6(Satz)

a) *Aus "R ist* **ana1** *von q, x"*
folgt "$R(0)$ ist Relation" und "$R(0)$ ist Funktion".

b) $\mathtt{rf1}qx(0)$ *Relation.*

c) $\mathtt{rf1}qx(0)$ *Funktion.*

Beweis **339-6** a) VS gleich R ist **ana1** von q, x.

1: Aus VS gleich "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

2.1: Via **259-36** gilt: $\{(0, q)\}$ Relation.

2.2: Via **259-36** gilt: $\{(0, q)\}$ Funktion.

3.1: Aus 2.1 und
aus 1
folgt: $\boxed{R(0) \text{ Relation}}$

3.2: Aus 2.2 und
aus 1
folgt: $\boxed{R(0) \text{ Funktion}}$

bc)

1: Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x.

2.b): Aus 1"$\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\mathtt{rf1}qx(0)$ Relation.

2.c): Aus 1"$\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\mathtt{rf1}qx(0)$ Funktion.

□

339-7. Ist R **ana1** von q, x und ist $n \in \mathsf{dom}\, R$, so ist $R(n)$ Relation.

339-7(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) *R ist **ana1** von q, x.*

$\rightarrow$) $n \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt "$R(n)$ Relation".

Beweis **339-7**

RECH-**Notation**.

$\mathsf{337.0}(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$

$\mathsf{339.0}(x) = \{\omega : x(\omega) \text{ Relation}\}$ **339-3(Def)**

1: Aus $\rightarrow$) "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

2: Aus $\rightarrow$) "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

3: Aus $\rightarrow$) "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **339-6**: $R(0)$ Relation.

4: Aus 3 "$R(0)$ Relation"
folgt via **339-4**: $0 \in \mathsf{339.0}(R)$.

...

<u>Beweis **339-7**</u> ...

`Thema5` $(\alpha \in \mathsf{339.0}(R)) \wedge (\alpha \in n)$.

`6.1`: Aus `Thema5`"$\alpha \in \mathsf{339.0}(R)$ ..."
folgt via **339-4**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`6.2`: Aus `Thema5`"... $\alpha \in n$",
aus →)"$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **338-9**: $1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`7`: Aus →)"R ist **ana1** von q, x",
aus `6.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `6.2`"$1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(1+\alpha) = \mathsf{337.0}(R(\alpha), x)$.

`8`: Via **337-2** gilt: $\mathsf{337.0}(R(\alpha), x)$ Relation.

`9`: Aus `7` und
aus `8`
folgt: $R(1+\alpha)$ Relation.

`10`: Aus `9`"$R(1+\alpha)$ Relation"
folgt via **339-4**: $1 + \alpha \in \mathsf{339.0}(R)$.

Ergo `Thema5`: `A1` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{339.0}(R)) \wedge (\alpha \in n)) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathsf{339.0}(R))$"

`6`: Aus `2`"$n \in \mathbb{N}$",
aus `4`"$0 \in \mathsf{339.0}(R)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{339.0}(R)) \wedge (\alpha \in n)) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathsf{339.0}(R))$"
folgt via **339-2**: $n \in \mathsf{339.0}(R)$.

`7`: Aus `6`"$n \in \mathsf{339.0}(R)$"
folgt via **339-3(Def)**: $R(n)$ Relation.

□

339-8. $\mathtt{rf1}qx(n)$ ist für $n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$ eine Relation.

339-8(Satz)

Aus "$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$" *folgt* "$\mathtt{rf1}qx(n)$ *Relation*".

Beweis **339-8** `VS` gleich $n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`1`: Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x.

`2`: Aus `1` "$\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x" und
aus `VS` gleich "$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$"
folgt via **339-7**: $\mathtt{rf1}qx(n)$ Relation.

□

339-9. Ist R **ana1** von q, x, so wird $R(1)$ - falls $1 \in \mathsf{dom}\, R$ - aus $R(0)$ mit der Rekursions-Vorshrift von **337-3(Def)** ermittelt. Dabei tritt $\mathsf{337.0}(R(0), x) = \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x)$ auf.

339-9(Satz)

a) *Aus* "$w \in \mathsf{337.0}(\{(p, q)\}, x)$" *folgt* "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \notin p) \wedge (((q, \Omega), \Phi) \in x) \wedge (w = (\{\Omega\} \cup p, \Phi))$".

b) *Aus* "$(u, v) \in \mathsf{337.0}(\{(p, q)\}, x)$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \notin p) \wedge (((q, \Omega), v) \in x) \wedge (u = \{\Omega\} \cup p)$".

c) *Aus* "$a \notin p$ *Menge*" *und* "$((q, a), b) \in x$" *folgt* "$(\{a\} \cup p, b) \in \mathsf{337.0}(\{(p, q)\}, x)$".

d) *Aus* "$w \in \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x)$" *folgt* "$\exists \Omega, \Phi : (((q, \Omega), \Phi) \in x) \wedge (w = (\{\Omega\}, \Phi))$".

e) *Aus* "$(u, v) \in \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x)$" *folgt* "$\exists \Omega : (u = \{\Omega\}) \wedge (((q, \Omega), v) \in x)$".

f) *Aus* "$((q, a), b) \in x$" *folgt* "$(\{a\}, b) \in \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x)$".

$$\mathsf{337.0}(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$$

Beweis **339-9** `a)` `VS` gleich $w \in \mathtt{337.0}(\{(p,q)\},x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathtt{337.0}(\{(p,q)\},x)$"
folgt via **337-1(Def)**: $\exists \Psi,\Omega,\Gamma,\Phi :$
$(\Omega \notin \Gamma) \wedge ((\Gamma,\Psi) \in \{(p,q)\}) \wedge (((\Psi,\Omega),\Phi) \in x) \wedge (w = (\{\Omega\} \cup \Gamma,\Phi))$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Gamma,\Psi) \in \{(p,q)\} \ldots$"
folgt via **folk**: $(\Gamma,\Psi) = (p,q)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(\Gamma,\Psi) = (p,q)$ Menge"
folgt via **IGP**: $(\Gamma = p) \wedge (\Psi = q)$.

`4.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega \notin \Gamma \ldots$" und
aus `3`"$\Gamma = p \ldots$"
folgt: $\Omega \notin p$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi,\Omega) = (q,\Omega)$.

`4.3:` Aus `3`"$\Gamma = p \ldots$"
folgt: $\{\Omega\} \cup \Gamma = \{\Omega\} \cup p$.

`5.1:` Aus `4.2`"$(\Psi,\Omega) = (q,\Omega)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Psi,\Omega),\Phi) = ((q,\Omega),\Phi)$.

`5.2:` Aus `4.3`"$\{\Omega\} \cup \Gamma = \{\Omega\} \cup p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Omega\} \cup \Gamma,\Phi) = (\{\Omega\} \cup p,\Phi)$.

`6.1:` Aus `5.1` und
aus `1`"$\ldots ((\Psi,\Omega),\Phi) \in x \ldots$"
folgt: $((q,\Omega),\Phi) \in x$.

`6.2:` Aus `5.2` und
aus `1`"$\ldots w = (\{\Omega\} \cup \Gamma,\Phi)$"
folgt: $w = (\{\Omega\} \cup p,\Phi)$.

`7:` Aus `1`"$\exists \ldots \Omega \ldots$",
aus `1`"$\exists \ldots \Phi$",
aus `4.1`,
aus `6.1` und
aus `6.2`
folgt:
$$\exists \Omega,\Phi : (\Omega \notin p) \wedge (((q,\Omega),\Phi) \in x) \wedge (w = (\{\Omega\} \cup p,\Phi)).$$

<u>Beweis **339-9**</u> `b)` `VS` gleich $(u,v) \in \mathsf{337.0}(\{(p,q)\},x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(u,v) \in \mathsf{337.0}(\{(p,q)\},x)$"
folgt via **ElementAxiom**: (u,v) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(u,v) \in \mathsf{337.0}(\{(p,q)\},x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists\Omega,\Phi : (\Omega \notin p) \wedge (((q,\Omega),\Phi) \in x) \wedge ((u,v) = (\{\Omega\} \cup p, \Phi)).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (u,v) = (\{\Omega\} \cup p, \Phi)$" und
aus `1.1`"(u,v) Menge"
folgt via **IGP**: $(u = \{\Omega\} \cup p) \wedge (v = \Phi)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots v = \Phi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((q,\Omega),v) = ((q,\Omega),\Phi)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.2`"$\ldots ((q,\Omega),\Phi) \in x \ldots$"
folgt: $((q,\Omega),v) \in x$.

`5:` Aus `1.2`"$\exists\Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\ldots \Omega \notin p \ldots$",
aus `4` und
aus `2`"$u = \{\Omega\} \cup p \ldots$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \notin p) \wedge (((q,\Omega),v) \in x) \wedge (u = \{\Omega\} \cup p)$.

`c)` `VS` gleich $(a \notin p \text{ Menge}) \wedge (((q,a),b) \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((q,a),b) \in x$"
folgt via **folk**: (q,a) Menge.

`2:` Aus `1`"(q,a) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: q, a Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge$\ldots$" und
aus `2`"$q \ldots$ Menge"
folgt via **259-36**: $(p,q) \in \{(p,q)\}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$a \notin p \ldots$",
aus `3`"$(p,q) \in \{(p,q)\}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots ((q,a),b) \in x$"
folgt via **337-2**: $(\{a\} \cup p, b) \in \mathsf{337.0}(\{(p,q)\},x)$.

Beweis **339-9** `d)` `VS` gleich $w \in \mathtt{337.0}(\{(0,q)\},x)\,.$

`1:` Aus `VS` gleich “ $w \in \mathtt{337.0}(\{(0,q)\},x)$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega,\Phi : (\Omega \notin 0) \wedge (((q,\Omega),\Phi) \in x) \wedge (w = (\{\Omega\} \cup 0,\Phi)).$$

`2:` Via **folk** gilt: $\{\Omega\} \cup 0 = \{\Omega\}.$

`3:` Aus `2`“ $\{\Omega\} \cup 0 = \{\Omega\}$ ”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Omega\} \cup 0,\Phi) = (\{\Omega\},\Phi).$

`4:` Aus `1`“ $\ldots w = (\{\Omega\} \cup 0,\Phi)$ ” und
aus `3`
folgt: $w = (\{\Omega\},\Phi).$

`5:` Aus `1`“ $\exists \Omega \ldots$ ”,
aus `1`“ $\ldots ((q,\Omega),\Phi) \in x \ldots$ ” und
aus `4`
folgt: $\exists \Omega,\Phi : (((q,\Omega),\Phi) \in x) \wedge (w = (\{\Omega\},\Phi)).$

`e)` `VS` gleich $(u,v) \in \mathtt{337.0}(\{(0,q)\},x)\,.$

`1:` Aus `VS` gleich “ $(u,v) \in \mathtt{337.0}(\{(0,q)\},x)$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$\exists \Omega : (\Omega \notin 0) \wedge (((q,\Omega),v) \in x) \wedge (u = \{\Omega\} \cup 0).$$

`2:` Via **folk** gilt: $\{\Omega\} \cup 0 = 0.$

`3:` Aus `2` und
aus `1`“ $\ldots u = \{\Omega\} \cup 0$ ”
folgt: $u = \{\Omega\}.$

`4:` Aus `1`“ $\exists \Omega \ldots$ ”,
aus `1`“ $\ldots ((q,\Omega),v) \in x \ldots$ ” und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : (u = \{\Omega\}) \wedge (((q,\Omega),v) \in x).$

<u>Beweis</u> **339-9** `f)` `VS` gleich $((q,a),b) \in x.$

`1:` Via **folk** gilt: $a \notin 0.$

`2:` Aus `1` "$a \notin 0$",
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge" und
aus `VS` gleich "$((q,a),b) \in x$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(\{a\} \cup 0, b) \in \mathsf{337.0}(\{(0,q)\}, x)\,.$

`3:` Via **folk** gilt: $\{a\} \cup 0 = \{a\}.$

`4:` Aus `3` "$\{a\} \cup 0 = \{a\}$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{a\} \cup 0, b) = (\{a\}, b).$

`5:` Aus `2` und
aus `4`
folgt: $(\{a\}, b) \in \mathsf{337.0}(\{(0,q)\}, x)\,.$

$\square$

339-10. Ist f eine Funktion, so ist $\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},f)$ eine Funktion.

339-10(Satz)

a) *Aus "R ist* **ana1** *von q,x" und "$1\in\mathsf{dom}\,R$" folgt "$R(1)=\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},x)$".*

b) *Aus "f Funktion" folgt "$\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},f)$ Funktion".*

c) *Aus "f Funktion" und "R ist* **ana1** *von q,f" und "$1\in\mathsf{dom}\,R$" folgt "$R(1)$ Funktion".*

d) *Aus "f Funktion" und "$1\in\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qf)$" folgt "$\mathtt{rf1}qf(1)$ Funktion".*

$$\mathsf{337.0}(x,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda\notin\mu)\wedge(\exists\Omega : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\lambda),\eta)\in y))\}$$

Beweis **339-10**

`RECH`-**Notation**.

. . .

Beweis **339-10** a) VS gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R)$.

1: Aus VS gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-4**: $0 \in \mathsf{dom}\, R$.

2: Aus VS gleich "$\ldots 1 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus +**schola**"$1 + 0 = 1$"
folgt: $1 + 0 \in \mathsf{dom}\, R$.

3: Aus VS gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$",
aus 1"$0 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 2"$1 + 0 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(1 + 0) = \mathsf{337.0}(R(0), x)$.

4: Aus 3 und
aus +**schola**"$1 + 0 = 0$"
folgt: $R(1) = \mathsf{337.0}(R(0), x)$.

5: Aus VS gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $R(1) = \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x)$.

<u>Beweis **339-10**</u> `b) VS` gleich f Funktion.

`1.1:` Via **337-2** gilt: $\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},f)$ Relation.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha,\beta)\ldots\in\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},f)$"
folgt via **339-9**: $\exists\Omega:(\alpha=\{\Omega\})\wedge(((q,\Omega),\beta)\in f)$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots(\alpha,\gamma)\ldots\in\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},f)$"
folgt via **339-9**: $\exists\Phi:(\alpha=\{\Phi\})\wedge(((q,\Phi),\gamma)\in f)$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\ldots\alpha=\{\Omega\}\ldots$" und
aus `2.2`"$\ldots\alpha=\{\Phi\}\ldots$"
folgt: $\{\Omega\}=\{\Phi\}$.

`3.2:` Aus `2.1`"$\ldots((q,\Omega),\beta)\in f$"
folgt via **folk**: (q,Ω) Menge.

`4:` Aus `3.2`"(q,Ω) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: Ω Menge.

`5:` Aus `4`"Ω Menge" und
aus `3.1`"$\{\Omega\}=\{\Phi\}$"
folgt via **SingeltonIdentitätsSatz**: $\Omega=\Phi$.

`6:` Aus `5`"$\Omega=\Phi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(q,\Omega)=(q,\Phi)$.

`7:` Aus `6`"$(q,\Omega)=(q,\Phi)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((q,\Omega),\gamma)=((q,\Phi),\gamma)$.

`8:` Aus `7` und
aus `2.2`"$\ldots((q,\Phi),\gamma)\in f$"
folgt: $((q,\Omega),\gamma)\in f$.

`9:` Aus `VS` gleich "f Funktion",
aus `2.1`"$\ldots((q,\Omega),\beta)\in f$" und
aus `8`"$((q,\Omega),\gamma)\in f$"
folgt via **18-18(Def)**: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},f))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},f)$ Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},f))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},f)$ Funktion.

<u>Beweis **339-10**</u> `c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, f) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots R$ ist **ana1** von $q, f \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $R(1) = \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, f)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion..."
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, f)$ Funktion.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $R(1)$ Funktion.

`d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, (\mathtt{rf1}qf))$.

`1:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qf$ ist **ana1** von q, f.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion...",
aus `1`"$\mathtt{rf1}qf$ ist **ana1** von q, f" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 \in \mathsf{dom}\, (\mathtt{rf1}qf)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathtt{rf1}qf(1)$ Funktion.

□

Analysis: R ist **ana1** von q, x: $R(2)$ mit $2 \in \mathsf{dom}\, R$.
R ist **ana1** von $q, \square$, $\square$ Algebra in A.

Ersterstellung: 21/05/15 **Letzte Änderung: 24/05/15**

340-1. Unter Aufgabe des Anspruchs möglichst geringer Voraussetzungen sollen nun die - zunächst - auf $x = \mathsf{A}$ abzielenden Untersuchungen von Klassen, die **ana1** von q, x sind, auf Algebren $x = \square$ eingeschränkt werden. Wie in solchen Fällen üblich wird der Verzicht auf Allgemeinheit von besserer Lesbarkeit begleitet. Zunächst soll $337.0(x, \square)$ untersucht werden.

340-1(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(x \times x) = x$.

b) $\mathsf{ran}\,(x \times x) = x$

c) *Aus* "$\square$ *Algebra in* A"
folgt "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\square) = A$" *und* "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,\square) = A$".

d) *Aus* "$\square$ *Algebra in* A"
folgt "$\mathsf{dom}\,(337.0(x, \square)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ A_{\mathrm{sngltn}}$"
und "$\mathsf{ran}\,(337.0(x, \square)\,) \subseteq A$".

e) *Aus* "$\square$ *Algebra in* A" *und* "$w \in 337.0(x, \square)$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (\Phi \notin \Psi)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega\_\square\_\Phi))$".

f) *Aus* "$\square$ *Algebra in* A" *und* "$(p, q) \in 337.0(x, \square)$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (\Phi \notin \Psi)$
$\wedge (p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = \Omega\_\square\_\Phi)$".

g) *Aus* "$\square$ *Algebra in* A"
und "$a, p \in A$" *und* "$p \notin E$" *und* "$(E, a) \in x$"
folgt "$(\{p\} \cup E, a\_\square\_p) \in 337.0(x, \square)$".

`ALG`-Notation.

$$337.0(x, \square) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in \square))\}$$

<u>Beweis **340-1**</u> `a)`

`1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

$$\mathsf{dom}\,(x \times x) \stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=} \mathsf{dom}\,(0 \times 0) \stackrel{\mathbf{6-13}}{=} \mathsf{dom}\,0 \stackrel{\mathbf{folk}}{=} 0 \stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=} x.$$

`1.2.Fall` $0 \neq x$.

Aus `1.2.Fall`“$0 \neq x$”
folgt via **7-22**: $\mathsf{dom}\,(x \times x) = x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{dom}\,(x \times x) = x$.

`b)`

`1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

$$\mathsf{ran}\,(x \times x) \stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=} \mathsf{ran}\,(0 \times 0) \stackrel{\mathbf{6-13}}{=} \mathsf{ran}\,0 \stackrel{\mathbf{folk}}{=} 0 \stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=} x.$$

`1.2.Fall` $0 \neq x$.

Aus `1.2.Fall`“$0 \neq x$”
folgt via **7-22**: $\mathsf{ran}\,(x \times x) = x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{ran}\,(x \times x) = x$.

<u>Beweis **340-1**</u> `c)` `VS` gleich $\square$ Algebra in A.

`1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\,\square = A \times A$.

`2.1:` $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\square) \stackrel{1}{=} \mathsf{dom}\,(A \times A) \stackrel{\text{a)}}{=} A$.

`2.2:` $\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,\square) \stackrel{1}{=} \mathsf{ran}\,(A \times A) \stackrel{\text{b)}}{=} A$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\square) = A}$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $\boxed{\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,\square) = A}$

`d)` `VS` gleich $\square$ Algebra in A.

`1.1:` Via **337-28** gilt: $\mathsf{dom}\,(337.0(x, \square)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,\square))_{\text{sngltn}}$.

`1.2:` Via **337-28** gilt: $\mathsf{ran}\,(337.0(x, \square)\,) \subseteq \mathsf{ran}\,\square$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in A"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,\square) = A$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $\mathsf{ran}\,\square \subseteq A$.

`3.1:` Aus `1.1` und
aus `2.1`
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\,(337.0(x, \square)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ A_{\text{sngltn}}}$

`3.2:` Aus `1.2`"$\mathsf{ran}\,(337.0(x, \square)\,) \subseteq \mathsf{ran}\,\square$" und
aus `2.2`"$\mathsf{ran}\,\square \subseteq A$"
folgt via **folk**: $\boxed{\mathsf{ran}\,(337.0(x, \square)\,) \subseteq A}$

<u>Beweis</u> **340-1** `e)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (w \in \mathtt{337.0}(x, \square))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in \mathtt{337.0}(x, \square)$"
folgt via **337-1(Def)**:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), \Gamma) \in \square)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1` "$\ldots ((\Omega, \Phi), \Gamma) \in \square \ldots$"
folgt via **306-11**: $\Omega, \Phi \in A$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1` "$\ldots ((\Omega, \Phi), \Gamma) \in \square \ldots$"
folgt via **306-11**: $\Gamma = \Omega\_\square\_\Phi$.

`3:` Aus `2.2` "$\Gamma = \Omega\_\square\_\Phi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega\_\square\_\Phi)$.

`4:` Aus `1` "$\ldots w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$" und
aus `3`
folgt: $w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega\_\square\_\Phi)$.

`5:` Aus `1` "$\exists \Omega, \Phi, \Psi \ldots$",
aus `2.1`,
aus `1` "$\ldots (\Psi, \Omega) \in x \ldots$",
aus `1` "$\ldots \Phi \notin \Psi \ldots$" und
aus `4`
folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (\Phi \notin \Psi)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega\_\square\_\Phi))$.

<u>Beweis **340-1**</u> `f)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge ((p,q) \in \mathsf{337.0}(x,\square))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\ldots (p,q) \in \mathsf{337.0}(x,\square)$”
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$(\square \text{ Algebra in } A) \wedge ((p,q) \in \mathsf{337.0}(x,\square))$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (\Phi \notin \Psi)$
$\wedge((p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega\_\square\_\Phi))$.

`2:` Aus `1.2`“$\ldots (p,q) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega\_\square\_\Phi)$” und
aus `1.1`“(p,q) Menge”
folgt via **IGP**: $(p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = \Omega\_\square\_\Phi)$.

`3:` Aus `1.1`“$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (\Phi \notin \Psi) \ldots$” und
aus `2`
folgt:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (\Phi \notin \Psi)$
$\wedge(p = \{\Phi\} \cup \Psi) \wedge (q = \Omega\_\square\_\Phi)$.

`g)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (a, p \in A) \wedge (p \notin E) \wedge ((E,a) \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\square$ Algebra in $A \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots a, p \in A \ldots$”
folgt via **316-9**: $((a,p), a\_\square\_p) \in \square$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots p \notin E \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots (E,a) \in x$” und
aus `1`“$((a,p), a\_\square\_p) \in \square$”
folgt via **337-2**: $(\{p\} \cup E, a\_\square\_p) \in \mathsf{337.0}(x,\square)$.

$\square$

340-2. Ist $\Box$ eine Algebra in A, so können Resultate aus **#339** zur Untersuchung von $\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\Box)$ herangezogen werden. Die Aussagen gewinnen an Klarheit.

340-2(Satz)

a) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$w \in \mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\Box)$"*
folgt "$q \in A$" und "$\exists \Omega : (\Omega \in A) \wedge (w = (\{\Omega\}, q\_\Box\_\Omega))$".

b) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$(u,v) \in \mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\Box)$"*
folgt "$q \in A$" und "$\exists \Omega : (\Omega \in A) \wedge (u = \{\Omega\}) \wedge (v = q\_\Box\_\Omega)$".

c) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$a, q \in A$"*
folgt "$(\{a\}, q\_\Box\_a) \in \mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\Box)$".

ALG-Notation.

$$\mathsf{337.0}(x,\Box) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu,\Omega) \in x) \wedge (((\Omega,\lambda),\eta) \in \Box))\}$$

<u>Beweis **340-2**</u> `a)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (w \in \mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\Box))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in \mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\Box)$"
folgt via **339-9**: $\exists \Omega, \Phi : (((q,\Omega),\Phi) \in \Box) \wedge (w = (\{\Omega\},\Phi))$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A\ldots$" und
aus `1`"$\ldots((q,\Omega),\Phi) \in \Box\ldots$"
folgt via **306-11**: $\Omega, q \in A$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A\ldots$" und
aus `1`"$\ldots((q,\Omega),\Phi) \in \Box\ldots$"
folgt via **306-11**: $\Phi = q\_\Box\_\Omega$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{q \in A}$

`3.2:` Aus `2.2`"$\Phi = q\_\Box\_\Omega$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Omega\},\Phi) = (\{\Omega\}, q\_\Box\_\Omega)$.

`4:` Aus `1`"$\ldots w = (\{\Omega\},\Phi)$" und
aus `3.2`
folgt: $w = (\{\Omega\}, q\_\Box\_\Omega)$.

`5:` Aus `1`"$\exists\Omega\ldots$",
aus `2.1`"$\Omega\ldots \in A$" und
aus `4`
folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in A) \wedge (w = (\{\Omega\}, q\_\Box\_\Omega))}$

Beweis **340-2** `b)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge ((u,v) \in \mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\square))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots(u,v) \in \mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\square)$"
folgt via **339-9**: $\exists \Omega : (u = \{\Omega\}) \wedge (((q,\Omega),v) \in \square)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A\ldots$" und
aus `1`"$\ldots((q,\Omega),v) \in \square$"
folgt via **306-11**: $q,\Omega \in A$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A\ldots$" und
aus `1`"$\ldots((q,\Omega),v) \in \square$"
folgt via **306-11**: $v = q\_\square\_\Omega$.

`3.1:` Aus `2.1`

folgt: $\boxed{q \in A}$

`3.2:` Aus `1`"$\exists\Omega\ldots$",
aus `2.1`"$\ldots\Omega \in A$",
aus `1`"$\ldots u = \{\Omega\}\ldots$" und
aus `2.2`

folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in A) \wedge (u = \{\Omega\}) \wedge (v = q\_\square\_\Omega)}$

`c)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (a,q \in A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a,q \in A$"
folgt via **316-9**: $((q,a),q\_\square\_a) \in \square$.

`2:` Aus `1`"$((q,a),q\_\square\_a) \in \square$"
folgt via **339-9**: $(\{a\},q\_\square\_a) \in \mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\square)$.

$\square$

340-3. Ist $\Box$ Algebra in A und ist $1 \in \mathsf{dom}\, R$, R ist **ana1** von $q, \Box$, so ist $R(1)$ Funktion.

<u>**340-3(Satz)**</u>

a) *Aus "$\Box$ Algebra in A"*
und "R ist **ana1** *von $q, \Box$"*
und "$1 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt "$R(1)$ Funktion".

b) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$"*
folgt "$\mathtt{rf1}q\Box(1)$ Funktion".

<u>Beweis **340-3**</u> a)
VS gleich $(\Box$ Algebra in $A) \wedge (R$ ist **ana1** von $q, \Box) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R)$.

1: Aus VS gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **93-6**: $\Box$ Funktion.

2: Aus VS gleich "$\ldots R$ ist **ana1** von $q, \Box, \ldots$",
aus 1"$\Box$ Funktion" und
aus VS gleich "$\ldots 1 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **339-10**: $R(1)$ Funktion.

b) VS gleich $(\Box$ Algebra in $A) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box))$.

1: Aus VS gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **93-6**: $\Box$ Funktion.

2: Aus 1"$\Box$ Funktion" und
aus VS gleich "$\ldots 1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$"
folgt via **339-10**: $\mathtt{rf1}q\Box(1)$ Funktion.

$\Box$

340-4. Falls $2 \in \mathsf{dom}\, R$ und R ist **ana1** von q, x, dann gilt auch $0, 1 \in \mathsf{dom}\, R$. Dies liegt an $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ und an $0, 1 < 2$ mit $0, 1 \in \mathbb{N}$.

340-4(Satz)

a) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$n < x \in m \in \mathbb{N}$" *folgt* "$n \in m$" *und* "$n \in x \in \mathbb{N}$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$n \leq x \in m \in \mathbb{N}$" *folgt* "$n \in m$" *und* "$x \in \mathbb{N}$".

c) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$n < x \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *folgt* "$n \in p$" *und* "$n \in x \in \mathbb{N}$".

d) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$n \leq x \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *folgt* "$n \in p$" *und* "$x \in \mathbb{N}$".

e) *Aus* "R *ist* **ana1** *von* q, x" *und* "$n \in \mathsf{dom}\, R$" *folgt* "$n \in \mathbb{N}$"

f) *Aus* "R *ist* **ana1** *von* q, x"
und "$m \leq n \in \mathsf{dom}\, R$"
und "$m \in \mathbb{N}$"
folgt "$m \in \mathsf{dom}\, R$".

g) *Aus* "R *ist* **ana1** *von* q, x" *und* "$2 \in \mathsf{dom}\, R$" *folgt* "$0, 1 \in \mathsf{dom}\, R$".

h) *Aus* "$n \in \mathsf{dom}\, (\mathtt{rf1}qx)$" *folgt* "$n \in \mathbb{N}$"

i) *Aus* "$m \leq n \in \mathsf{dom}\, (\mathtt{rf1}qx)$" *und* "$m \in \mathbb{N}$" *folgt* "$m \in \mathsf{dom}\, (\mathtt{rf1}qx)$".

j) *Aus* "$2 \in \mathsf{dom}\, (\mathtt{rf1}qx)$" *folgt* "$0, 1 \in \mathsf{dom}\, (\mathtt{rf1}qx)$".

$\leq$-Notation.

<u>Beweis **340-4**</u> `a)` `VS` gleich $(n\in\mathbb{N})\wedge(n<x\in m\in\mathbb{N})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x\in m\in\mathbb{N}$"

folgt via **307-2**: $\boxed{x\in\mathbb{N}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x\in m$" und
aus `VS` gleich "$\ldots m\in\mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $x<m$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$n\in\mathbb{N}\ldots$",
aus `1.1`"$x\in\mathbb{N}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n<x\ldots$"

folgt via **197-5**: $\boxed{n\in x}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n<x\ldots$" und
aus `1.2`"$x<m$"
folgt via **folk**: $n<m$.

`3:` Aus `VS` gleich "$n\in\mathbb{N}\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots m\in\mathbb{N}$" und
aus `2.2`"$n<m$"

folgt via **197-5**: $\boxed{n\in m}$

<u>Beweis **340-4**</u> `b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq x \in m \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \leq x \ldots$"
folgt via **folk**: $(n < x) \vee (n = x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n < x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `1.1.Fall` "$n < x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in m \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(n \in m) \wedge (n \in x \in \mathbb{N})$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(n \in m) \wedge (x \in \mathbb{N})$.

`1.2.Fall` $n = x$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in m \ldots$"
folgt: $n \in m$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt: $x \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(n \in m) \wedge (x \in \mathbb{N})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(n \in m) \wedge (x \in \mathbb{N})$.

<u>Beweis **340-4**</u> `c)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n < x \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **338-8**: $x \subseteq p$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $\boxed{x \in \mathbb{N}}$

`2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `1.2`"$x \in \mathbb{N}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n < x \ldots$"
folgt via **197-5**: $\boxed{n \in x}$

`3:` Aus `2`"$n \in x$" und
aus `1.1`"$x \subseteq p$"
folgt via **folk**: $\boxed{n \in p}$

Beweis **340-4** `d)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq x \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \leq x \ldots$"
folgt via **folk**: $(n < x) \vee (n = x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n < x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `1.1.Fall` "$n < x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(n \in p) \wedge (n \in x \in \mathbb{N})$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(n \in p) \wedge (x \in \mathbb{N})$.

`1.2.Fall` $n = x$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in p \ldots$"
folgt: $n \in p$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt: $x \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(n \in p) \wedge (x \in \mathbb{N})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(n \in p) \wedge (x \in \mathbb{N})$.

`e)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis **340-4**</u> `f)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (m \leq n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \leq n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)` : $m \in \mathsf{dom}\, R$.

`g)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1.1:` Via $\in$**schola** gilt: $0, 1 \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Via $\leq$**schola** gilt: $0, 1 \leq 2$.

`2:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$",
aus `1.2`"$0, 1 \leq 2$",
aus `VS` gleich "$\ldots 2 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1.1`"$0, 1 \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $0, 1 \in \mathsf{dom}\, R$.

`h)` `VS` gleich $n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`1:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x.

`2:` Aus `1`"$\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x" und
aus `VS` gleich "$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $n \in \mathbb{N}$.

`i)` `VS` gleich $(m \leq n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`1:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x.

`2:` Aus `1`"$\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x" und
aus `VS` gleich "$(m \leq n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge (m \in \mathbb{N})$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $m \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`j)` `VS` gleich $2 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`1:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x.

`2:` Aus `1`"$\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x" und
aus `VS` gleich "$2 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $0, 1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

$\square$

340-5. Es wird die Untersuchung von $R(2)$, R ist **ana1** von q, x, für $2 \in \mathsf{dom}\, R$ eröffnet.

340-5(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *R ist* **ana1** *von q, x.*

$\rightarrow\!)$ $2 \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt "$R(2) = 337.0(337.0(\{(0,q)\}, x)\,, x)$".

$$337.0(x,y) \;=\{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$$

Beweis **340-5**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "R ist **ana1** von q, x" und
aus $\rightarrow\!)$ "$2 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **340-4**: $1 \in \mathsf{dom}\, R$.

2: Aus +**schola**"$1+1=2$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$2 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt: $1+1 \in \mathsf{dom}\, R$.

3: Aus $\rightarrow\!)$ "R ist **ana1** von q, x",
aus 1 "$1 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 2 "$1+1 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(1+1) = 337.0(R(1), x)$.

4: Aus 3 und
aus +**schola**"$1+1=2$"
folgt: $R(2) = 337.0(R(1), x)$.

5: Aus $\rightarrow\!)$ "R ist **ana1** von q, x" und
aus 1 "$1 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **339-10**: $R(1) = 337.0(\{(0,q)\}, x)$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $R(2) = 337.0(337.0(\{(0,q)\}, x)\,)$.

□

340-6. Zur Untersuchung von $R(2)$, $2 \in \mathsf{dom}\, R$, R ist **ana1** von q, x, soll Einiges über die Elemente von $R(2)$ ausgesagt werden.

<u>**340-6(Satz)**</u> *Aus "R ist* **ana1** *von q, x" und "$2 \in \mathsf{dom}\, R$" und ...*

a) *... und "$w \in R(2)$"*
folgt "$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (((q, \Gamma), \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), \Psi) \in x) \wedge (\Phi \neq \Gamma) \wedge (w = (\{\Phi, \Gamma\}, \Psi))$".

b) *... und "$(u, v) \in R(2)$"*
folgt "$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (((q, \Psi), \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), v) \in x) \wedge (\Phi \neq \Psi) \wedge (u = \{\Phi, \Psi\})$".

c) *... und "$a \neq b$" und "$((q, b), d) \in x$" und "$((d, a), c) \in x$*
folgt "$(\{a, b\}, c) \in R(2)$".

<u>Beweis **340-6**</u>

$\mathsf{337.0}(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$

---

a) VS gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (w \in R(2))$.

1: Aus VS gleich "R ist **ana1** von q, x ..." und
aus VS gleich "... $2 \in \mathsf{dom}\, R$ ..."
folgt via **340-5**: $R(2) = \mathsf{337.0}(\mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x))$.

2: Aus VS gleich "... $w \in R(2)$" und
aus 1
folgt: $w \in \mathsf{337.0}(\mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x))$.

3: Aus 2 "$w \in \mathsf{337.0}(\mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x))$"
folgt via **337-1(Def)**:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x)) \wedge (((\Omega, \Phi), \Gamma) \in x) \wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$

4.1: Aus 3 "... $((\Omega, \Phi), \Gamma) \in x$ ..."
folgt via **folk**: (Ω, Φ) Menge.

4.2: Aus 3 "... $(\Psi, \Omega) \in \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x)$ ..."
folgt via **339-9**: $\exists \Upsilon : (\Psi = \{\Upsilon\}) \wedge (((q, \Upsilon), \Omega) \in x)$.

...

<u>Beweis **340-6**</u> `a)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (w \in R(2))$.

...

`5.1:` Aus `4.1`“(Ω, Φ) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: Φ Menge.

`5.2:` Aus `3`“$\ldots \Phi \notin \Psi \ldots$” und
aus `4.2`“$\ldots \Psi = \{\Upsilon\} \ldots$”
folgt: $\Phi \notin \{\Upsilon\}$.

`5.3:` Aus `4.2`“$\ldots \Psi = \{\Upsilon\} \ldots$”
folgt: $\{\Phi\} \cup \Psi = \{\Phi\} \cup \{\Upsilon\}$.

`6.1:` Aus `5.2`“$\Phi \notin \{\Upsilon\}$”
folgt via **1-7**: $(\Phi \neq \Upsilon) \vee (\Phi \text{ Unmenge})$.

`6.2:` Via **4-11** gilt: $\{\Phi\} \cup \{\Upsilon\} = \{\Phi, \Upsilon\}$.

`7.1:` Aus `6.1` und
aus `5.1`
folgt: $\Phi \neq \Upsilon$.

`7.2:` Aus `5.3` und
aus `6.2`
folgt: $\{\Phi\} \cup \Psi = \{\Phi, \Upsilon\}$.

`8:` Aus `7.2`“$\{\Phi\} \cup \Psi = \{\Phi, \Upsilon\}$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma) = (\{\Phi, \Upsilon\}, \Gamma)$.

`9:` Aus `3`“$\ldots w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$” und
aus `8`
folgt: $w = (\{\Phi, \Upsilon\}, \Gamma)$.

`10:` Aus `3`“$\exists \Omega, \Phi \ldots$”,
aus `3`“$\exists \ldots \Gamma$”,
aus `4.2`“$\exists \Upsilon \ldots$”,
aus `4.2`“$\ldots ((q, \Upsilon), \Omega) \in x$”,
aus `3`“$\ldots ((\Omega, \Phi), \Gamma) \in x \ldots$”,
aus `7.1` und
aus `9`
folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Gamma, \Upsilon : (((q, \Upsilon), \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), \Gamma) \in x)$
$\wedge (\Phi \neq \Upsilon) \wedge (w = (\{\Phi, \Upsilon\}, \Gamma))$.

`11:` Aus `10`
folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Upsilon : (((q, \Upsilon), \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), \Psi) \in x)$
$\wedge (\Phi \neq \Upsilon) \wedge (w = (\{\Phi, \Upsilon\}, \Psi))$.

...

<u>Beweis **340-6**</u> `a)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (w \in R(2))$.

...

`12:` Aus `11`
folgt: $$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (((q, \Gamma), \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), \Psi) \in x) \wedge (\Phi \neq \Gamma) \wedge (w = (\{\Phi, \Gamma\}, \Psi)).$$

`b)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge ((u, v) \in R(2))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (u, v) \in R(2)$"
folgt via **ElementAxiom**: (u, v) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge ((u, v) \in R(2))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (((q, \Gamma), \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), \Psi) \in x) \wedge (\Phi \neq \Gamma) \wedge ((u, v) = (\{\Phi, \Gamma\}, \Psi)).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (u, v) = (\{\Phi, \Gamma\}, \Psi)$" und
aus `1.1`"(u, v) Menge"
folgt via **IGP**: $(u = \{\Phi, \Gamma\}) \wedge (v = \Psi)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots v = \Psi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega, \Phi), v) = ((\Omega, \Phi), \Psi)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.2`"$\ldots ((\Omega, \Phi), \Psi) \in x \ldots$"
folgt: $((\Omega, \Phi), v) \in x$.

`5:` Aus `1.2`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \ldots \Gamma \ldots$",
aus `1.2`"$\ldots ((q, \Gamma), \Omega) \in x \ldots$",
aus `4`,
aus `1.2`"$\ldots \Phi \neq \Gamma \ldots$" und
aus `2`"$u = \{\Phi, \Gamma\} \ldots$"
folgt:
$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : (((q, \Gamma), \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), v) \in x) \wedge (\Phi \neq \Gamma) \wedge (u = \{\Phi, \Gamma\}).$$

`6:` Aus `5`
folgt:
$$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (((q, \Psi), \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), v) \in x) \wedge (\Phi \neq \Psi) \wedge (u = \{\Phi, \Psi\}).$$

<u>Beweis **340-6**</u> `c)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (a \neq b)$
$\wedge (((q, b), d) \in x) \wedge (((d, a), c) \in x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R) \ldots$"
folgt via **340-5**: $R(2) = 337.0(337.0(\{(0, q)\}, x))$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((q, b), d) \in x \ldots$"
folgt via **339-9**: $(\{b\}, d) \in 337.0(\{(0, q)\}, x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \neq b \ldots$"
folgt via **1-7**: $a \notin \{b\}$.

`3:` Aus `2`"$a \notin \{b\}$",
aus `1.2`"$(\{b\}, d) \in 337.0(\{(0, q)\}, x)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots ((d, a), c) \in x$"
folgt via **337-2**: $(\{a\} \cup \{b\}, c) \in 337.0(337.0(\{(0, q)\}, x), x)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.1`
folgt: $(\{a\} \cup \{b\}, c) \in R(2)$.

`5:` Via **4-11** gilt: $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$.

`6:` Aus `5`"$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{a\} \cup \{b\}, c) = (\{a, b\}, c)$.

`7:` Aus `6` und
aus `4`
folgt: $(\{a, b\}, c) \in R(2)$.

$\square$

340-7. Es wird **340-6** für $x = \Box$ Algebra in A re-formuliert.

<u>**340-7(Satz)**</u> *Aus* "$\Box$ *Algebra in* A" *und* "R *ist* **ana1** *von* $q, \Box$" *und* "$2 \in \mathsf{dom}\, R$" *und* ...

a) ... *und* "$w \in R(2)$" *folgt* "$q \in A$" *und* "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge (\Omega \neq \Phi) \wedge (w = (\{\Omega, \Phi\}, (q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega))$".

b) ... *und* "$(u, v) \in R(2)$" *folgt* "$v, q \in A$" *und* "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge (\Omega \neq \Phi) \wedge (u = \{\Omega, \Phi\}) \wedge (v = (q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega)$".

c) ... *und* "$a \neq b$" *und* "$a, b, q \in A$" *folgt* "$(\{a, b\}, (q\_\Box\_b)\_\Box\_a) \in R(2)$".

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **340-7**</u> `a)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \Box) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (w \in R(2))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \Box) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (w \in R(2))$" folgt via **340-6**: $\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (((q, \Gamma), \Omega) \in \Box) \wedge (((\Omega, \Phi), \Psi) \in \Box) \wedge (\Phi \neq \Gamma) \wedge (w = (\{\Phi, \Gamma\}, \Psi))$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und aus `1` "$\ldots ((q, \Gamma), \Omega) \in \Box \ldots$" folgt via **306-11**: $\Omega = q\_\Box\_\Gamma$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und aus `1` "$\ldots ((q, \Gamma), \Omega) \in \Box \ldots$" folgt via **306-11**: $q, \Gamma \in A$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und aus `1` "$\ldots ((\Omega, \Phi), \Psi) \in \Box \ldots$" folgt via **306-11**: $\Psi = \Omega\_\Box\_\Phi$.

`2.4:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und aus `1` "$\ldots ((\Omega, \Phi), \Psi) \in \Box \ldots$" folgt via **306-11**: $\Omega, \Phi \in A$.

...

<u>Beweis</u> **340-7** `a) VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \Box)$
$\wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (w \in R(2))$.

...

`3.1:` Aus `2.2`

folgt: $\boxed{q \in A}$

`3.2:` Aus `2.1` und
aus `2.3`
folgt: $\Psi = (q\_\Box\_\Gamma)\_\Box\_\Phi$.

`4:` Aus `3.2`“$\Psi = (q\_\Box\_\Gamma)\_\Box\_\Phi$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Phi, \Gamma\}, \Psi) = (\{\Phi, \Gamma\}, (q\_\Box\_\Gamma)\_\Box\_\Phi)$.

`5:` Aus `1`“$\ldots w = (\{\Phi, \Gamma\}, \Psi)$” und
aus `4`
folgt: $w = (\{\Phi, \Gamma\}, (q\_\Box\_\Gamma)\_\Box\_\Phi)$.

`6:` Aus `1`“$\exists \ldots \Phi \ldots$”,
aus `1`“$\exists \ldots \Gamma \ldots$”,
aus `2.4`“$\ldots \Phi \in A$”,
aus `2.2`“$\ldots \Gamma \in A$”,
aus `1`“$\ldots \Phi \neq \Gamma \ldots$” und
aus `5`
folgt: $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \in A) \wedge (\Phi \neq \Gamma) \wedge (w = (\{\Phi, \Gamma\}, (q\_\Box\_\Gamma)\_\Box\_\Phi))$.

`7:` Aus `6`
folgt: $\exists \Omega, \Gamma : (\Omega, \Gamma \in A) \wedge (\Omega \neq \Gamma) \wedge (w = (\{\Omega, \Gamma\}, (q\_\Box\_\Gamma)\_\Box\_\Omega))$.

`8:` Aus `7`

folgt: $\boxed{\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge (\Omega \neq \Phi) \wedge (w = (\{\Omega, \Phi\}, (q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega))}$

<u>Beweis **340-7**</u> `b)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \Box)$
$\wedge(2 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge ((u,v) \in R(2))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (u,v) \in R(2)$"
folgt via **ElementAxiom**: (u,v) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \Box) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(w \in R(2))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge (\Omega \neq \Phi) \wedge ((u,v) = (\{\Omega, \Phi\}, (q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega))$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \Box) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(w \in R(2))$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{q \in A}$

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `1.3`"$q \in A$" und
aus `1.2`"$\ldots \Phi \in A \ldots$"
folgt via **93-11**: $q\_\Box\_\Phi \in A$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (u,v) = (\{\Omega, \Phi\}, (q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega)$" und
aus `1.1`"(u,v) Menge"
folgt via **IGP**: $(u = \{\Omega, \Phi\}) \wedge (v = (q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `1.2`"$\ldots \Omega \ldots \in A \ldots$" und
aus `2.1`"$q\_\Box\_\Phi \in A$"
folgt via **93-11**: $(q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega \in A$.

`3.2:` Aus `1.2`"$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge (\Omega \neq \Phi) \ldots$" und
aus `2.2`
folgt:

$$\boxed{\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge (\Omega \neq \Phi) \wedge (u = \{\Omega, \Phi\}) \wedge (v = (q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega)}$$

`4:` Aus `2.2`"$\ldots v = (q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega$" und
aus `3.1`
folgt: $\boxed{v \in A}$

<u>Beweis **340-7**</u> `c)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \square)$
$\wedge(2 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (a \neq b) \wedge (a, b, q \in A)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b, q \in A$"
folgt via **93-11**: $q \_\square\_ b \in A$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b, q \in A$"
folgt via **316-9**: $((q, b), q \_\square\_ b) \in \square$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \ldots \in A$" und
aus `1.1`"$q \_\square\_ b \in A$"
folgt via **316-9**: $((q \_\square\_ b, a), (q \_\square\_ b) \_\square\_ a) \in \square$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots (R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \square) \wedge (2 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (a \neq b)$",
aus `1.2`"$((q, b), q \_\square\_ b) \in \square$" und
aus `2`"$((q \_\square\_ b, a), (q \_\square\_ b) \_\square\_ a) \in \square$"
folgt via **340-6**: $(\{a, b\}, (q \_\square\_ b) \_\square\_ a) \in R(2)$.

$\square$

340-8. Die Bedingung $q \in A$ vorangehender Sätze ist unter den dortigen Voraussetzungen notwendig für $0 \neq R(2)$.

340-8(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow\!)$ R *ist* **ana1** *von* $q, \Box$.

$\rightarrow\!)$ $2 \in \mathsf{dom}\, R$.

$\rightarrow\!)$ $0 \neq R(2)$.

Dann folgt "$q \in A$*".*

Beweis **340-8**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$0 \neq R(2)$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in R(2)$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "$\Box$ Algebra in A",
aus $\rightarrow\!)$ "R ist **ana1** von $q, \Box$",
aus $\rightarrow\!)$ "$2 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1 "$\ldots \Omega \in R(2)$"
folgt via **340-7**: $q \in A$.

$\Box$

340-9. Ist R **ana1** von $q, \square$, $\square$ Algebra in q, x, mit $2 \in \mathsf{dom}\, R$ und ist $R(2)$ eine Funktion, so müssen bezüglich $\square$ gewisse Rechenregeln gelten. Dies weist nach, dass die Existenz nicht-trivialer R, die **ana1** von $q, \square$ sind, nur für bestimmte Algebren gewährleistet werden kann. Dies ist weder überraschend noch im Hinblick auf A ein Problem.

340-9(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\square$ *Algebra in* A.

$\rightarrow\!)$ R *ist* **ana1** *von* $q, \square$.

$\rightarrow\!)$ $2 \in \mathsf{dom}\, R$.

$\rightarrow\!)$ $R(2)$ *Funktion.*

Dann folgt "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow ((q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta = (q\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha)$".

ALG-Notation.

Beweis **340-9**

1: Es gilt: $(q \notin A) \vee (q \in A)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $q \notin A$.

`Thema1.1.1` $(\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta)$.

2.1: Aus $\rightarrow\!)$ "$\square$ Algebra in A" und
aus `1.1.Fall` "$q \notin A$"
folgt via **93-13**: $q\_\square\_\alpha = \mathcal{U}$.

2.2: Aus $\rightarrow\!)$ "$\square$ Algebra in A" und
aus `1.1.Fall` "$q \notin A$"
folgt via **93-13**: $q\_\square\_\beta = \mathcal{U}$.

3: $(q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U}\_\square\_\beta \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U}\_\square\_\alpha$
$\stackrel{2.2}{=} (q\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha$.

Ergo `Thema1.1.1`:
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta = (q\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha)$.

...

Beweis **340-9** . . .

`Fallunterscheidung`

. . .

`1.2.Fall` $q \in A.$

`Thema1.2.1` $(\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta).$

`2.1:` Aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ R ist **ana1** von $q, \square$ ” ,
aus →) “ $2 \in \mathsf{dom}\, R$ ” ,
aus `Thema1.2.1`“ $\ldots \alpha \neq \beta$ ” ,
aus `Thema1.2.1`“ $\alpha, \beta \in A \ldots$ ” und
aus `1.2.Fall`“ $q \in A$” und
folgt via **340-7**: $(\{\alpha, \beta\}, (q\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha) \in R(2).$

`2.2:` Aus `Thema2`“ $\ldots \alpha \neq \beta$ ”
folgt: $\beta \neq \alpha.$

`2.3:` Via **folk** gilt: $\{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\}.$

`3.1:` Aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ R ist **ana1** von $q, \square$ ” ,
aus →) “ $2 \in \mathsf{dom}\, R$ ” ,
aus `2.2`“ $\ldots \beta \neq \alpha$ ” ,
aus `Thema2`“ $\ldots \beta \in A \ldots$ ” ,
aus `Thema2`“ $\alpha \ldots \in A \ldots$ ” und
aus `1.2.Fall`“ $q \in A$”
folgt via **340-7**: $(\{\beta, \alpha\}, (q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta) \in R(2).$

`3.2:` Aus `2.3`“ $\{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\}$ ”
folgt via **PaarAxiom I**:
$$(\{\alpha, \beta\}, (q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta) = (\{\beta, \alpha\}, (q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta).$$

`4:` Aus `3.2` und
aus `3.1`
folgt: $(\{\alpha, \beta\}, (q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta) \in R(2).$

`5:` Aus →) “ $\ldots R(2)$ Funktion ” ,
aus `4`“ $(\{\alpha, \beta\}, (q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta) \in R(2)$ ” und
aus `2.1`“ $(\{\alpha, \beta\}, (q\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha) \in R(2)$ ”
folgt via **18-18(Def)**:
$$(q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta = (q\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha.$$

Ergo `Thema1.2.1`:
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta = (q\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha).$$

. . .

<u>Beweis</u> **340-9** ...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta = (q\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha).$$

$\square$

340-10. Die notwendige Bedingung von **340-9** garantiert unter Beibehaltung der anderen Voraussetzungen $R(2)$ Funktion.

340-10(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow\!)$ R *ist* **ana1** *von* $q, \Box$.

$\rightarrow\!)$ $2 \in \mathsf{dom}\, R$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((q\_\Box\_\alpha)\_\Box\_\beta = (q\_\Box\_\beta)\_\Box\_\alpha)$.

Dann folgt "$R(2)$ Funktion".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **340-10**

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "R ist **ana1** von $q, \Box$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$2 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **339-7**: $R(2)$ Relation.

`Thema1.2` $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in R(2)$.

`2.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\Box$ Algebra in A",
aus $\rightarrow\!)$ "R ist **ana1** von $q, \Box$",
aus $\rightarrow\!)$ "$2 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `Thema1.2` "$(\alpha, \beta) \ldots \in R(2)$"
folgt via **340-7**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge (\Omega \neq \Phi)$
$\wedge(\alpha = \{\Omega, \Phi\}) \wedge (\beta = (q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega)$.

`2.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\Box$ Algebra in A",
aus $\rightarrow\!)$ "R ist **ana1** von $q, \Box$",
aus $\rightarrow\!)$ "$2 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `Thema1.2` "$\ldots (\alpha, \gamma) \in R(2)$"
folgt via **340-7**: $\exists \Gamma, \Psi : (\Gamma, \Psi \in A) \wedge (\Gamma \neq \Psi)$
$\wedge(\alpha = \{\Gamma, \Psi\}) \wedge (\gamma = (q\_\Box\_\Psi)\_\Box\_\Gamma)$.

...

...

Beweis **340-10** . . .

`Thema1.2` $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in R(2)$.

. . .

`3.1:` Aus `2.1`“. . . $\Omega, \Phi \in A$ . . . ”
folgt via **ElementAxiom**: Ω, Φ Menge.

`3.2:` Aus `2.2`“. . . $\Gamma, \Psi \in A$ . . . ”
folgt via **ElementAxiom**: Γ, Ψ Menge.

`3.3:` Aus `2.1`“. . . $\alpha = \{\Omega, \Phi\}$ ” und
aus `2.2`“. . . $\alpha = \{\Gamma, \Psi\}$ . . . ”
folgt: $\{\Omega, \Phi\} = \{\Gamma, \Psi\}$.

`4:` Aus `3.3`“ $\{\Omega, \Phi\} = \{\Gamma, \Psi\}$ ” ,
aus `3.1`“ Ω, Φ Menge ” und
aus `3.2`“ Γ, Φ Menge ”
folgt via **326-2**:
$$((\Omega = \Gamma) \wedge (\Phi = \Psi)) \vee ((\Omega = \Psi) \wedge (\Phi = \Gamma)).$$

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $(\Omega = \Gamma) \wedge (\Phi = \Psi)$.

`5:` Aus `4.1.Fall`“ $\Omega = \Gamma$ . . . ”
folgt: $(q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega = (q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Gamma$.

`6:` Aus `4.1.Fall`“. . . $\Phi = \Psi$ ”
folgt: $(q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Gamma = (q\_\Box\_\Psi)\_\Box\_\Gamma$.

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $(q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega = (q\_\Box\_\Psi)\_\Box\_\Gamma$.

`8:` Aus `2.1`“. . . $\beta = (q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega$ ” ,
aus `2.2`“. . . $\gamma = (q\_\Box\_\Psi)\_\Box\_\Gamma$ ” und
aus `7`
folgt: $\beta = \gamma$.

. . .

. . .

Beweis **340-10** ...

`Thema1.2` $(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in R(2)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`4.2.Fall` $(\Omega=\Psi)\wedge(\Phi=\Gamma)$.

5: Aus 2.1"... $(\Omega,\Phi\in A)\wedge(\Omega\neq\Phi)$ ..." und
aus →)"$\forall\alpha,\beta: ((\alpha,\beta\in A)\wedge(\alpha\neq\beta))$
$\Rightarrow ((q\_\Box\_\alpha)\_\Box\_\beta=(q\_\Box\_\beta)\_\Box\_\alpha)$"
folgt: $(q\_\Box\_\Omega)\_\Box\_\Phi=(q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega$.

6: Aus 2.1"... $\beta=(q\_\Box\_\Phi)\_\Box\_\Omega$" und
aus 5
folgt: $(q\_\Box\_\Omega)\_\Box\_\Phi=\beta$.

7: Aus 6
folgt: $\beta=(q\_\Box\_\Omega)\_\Box\_\Phi$.

8: Aus 7 und
aus 4.2.Fall"... $\Phi=\Gamma$"
folgt: $\beta=(q\_\Box\_\Omega)\_\Box\_\Gamma$.

9: Aus 8 und
aus 4.2.Fall"$\Omega=\Psi$ ..."
folgt: $\beta=(q\_\Box\_\Psi)\_\Box\_\Gamma$.

10: Aus 9 und
aus 2.2"... $\gamma=(q\_\Box\_\Psi)\_\Box\_\Gamma$"
folgt: $\beta=\gamma$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall\alpha,\beta,\gamma: ((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in R(2))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"

2: Aus 1.1"$R(2)$ Relation" und
aus A1 gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma: ((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in R(2))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $R(2)$ Funktion.

□

340-11. Die Allquantor-Bedinung von **340-10** fordert die Herstellung eines Bezugs zu allgemeinen Konzepten der Algebra geradezu heraus.

340-11(Satz) *Es gelte:*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) o *ist* $\Box$*neutral auf* A.

→) $\Box$ *kommutativ auf* A.

→) R *ist* **ana1** *von* $o, \Box$.

→) $2 \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt "$R(2)$ *Funktion"*.

Beweis **340-11**

`ALG`-**Notation**.

`Thema1.1` $(\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta)$.

`2.1:` Aus →) “o neutral auf A” und
aus `Thema1.1` “$\alpha \ldots \in A \ldots$”
folgt via **208-1(Def)**: $o\_\square\_\alpha = \alpha$.

`2.2:` Aus →) “o neutral auf A” und
aus `Thema1.1` “$\ldots \beta \in A \ldots$”
folgt via **208-1(Def)**: $o\_\square\_\beta = \beta$.

`2.3:` Aus →) “$\square$ kommutativ auf A” und
aus `Thema1.1` “$\alpha, \beta \in A$”
folgt via **210-1(Def)**: $\alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha$.

`3:` $(o\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta \stackrel{2.1}{=} \alpha\_\square\_\beta \stackrel{2.3}{=} \beta\_\square\_\alpha \stackrel{2.2}{=} (o\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((o\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta = (o\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha)$”

`1.2:` Aus →) “$\square$ Algebra in A”,
aus →) “R ist **ana1** von $o, \square$”,
aus →) “$2 \in \mathsf{dom}\, R$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow ((o\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta = (o\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha)$”
folgt via **340-10**: $R(2)$ Funktion.

□

340-12. Für die Verifikation möglicher Eigenschaften einer Algebra $\Box$ in A ist es gelegentlich hilfreich, Rechengesetze ausserhalb von A zur Verfügung zu haben.

340-12(Satz)

a) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$\Box$ kommutativ auf A" folgt "$p\_\Box\_q = q\_\Box\_p$".*

b) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$\Box$ assoziativ auf A" folgt "$p\_\Box\_(q\_\Box\_r) = (p\_\Box\_q)\_\Box\_r$".*

ALG-**Notation**.

Beweis **340-12** a) VS gleich $(\Box$ Algebra in $A) \wedge (\Box$ kommutativ auf $A)$.

1: Aus VS gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$.

2: Aus →) "$\ldots \Box$ kommutativ auf A" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$"
folgt via **233-3**: $p\_\Box\_q = q\_\Box\_p$.

b) VS gleich $(\Box$ Algebra in $A) \wedge (\Box$ assoziativ auf $A)$.

1: Aus VS gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$.

2: Aus →) "$\ldots \Box$ assoziativ auf A" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$"
folgt via **233-3**: $p\_\Box\_(q\_\Box\_r) = (p\_\Box\_q)\_\Box\_r$.

$\Box$

340-13. Ist R **ana1** von $q, \Box, \Box$ Algebra in A, mit $2 \in \mathsf{dom}\, R$, so ist im Hinblick auf das Weitere die Forderung o ist $\Box$ neutral auf A von **340-11** *noch* nicht von allzu großer Bedeutung. Statt dessen scheinen Kommutativität und Assoziativität fürs Erste passender.

340-13(Satz) *Es gelte:*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) $\Box$ *kommutativ auf* A.

→) $\Box$ *assoziativ auf* A.

→) R *ist* **ana1** *von* $q, \Box$.

→) $2 \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt "$R(2)$ Funktion".

Beweis **340-13**

`ALG`-**Notation**.

`Thema1.1` $(\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta)$.

`2.1:` Aus →) "$\square$ Algebra in A" und
aus →) "$\square$ assoziativ auf A"
folgt via **340-12**: $q\_\square\_(\alpha\_\square\_\beta) = (q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta$.

`2.2:` Aus →) "$\square$ Algebra in A" und
aus →) "$\square$ kommutativ auf A"
folgt via **340-12**: $\alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha$.

`2.3:` Aus →) "$\square$ Algebra in A" und
aus →) "$\square$ assoziativ auf A"
folgt via **340-12**: $q\_\square\_(\beta\_\square\_\alpha) = (q\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha$.

`3:` $(q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta \stackrel{2.1}{=} q\_\square\_(\alpha\_\square\_\beta) \stackrel{2.2}{=} q\_\square\_(\beta\_\square\_\alpha)$
$\stackrel{2.3}{=} (q\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta = (q\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha)$"

`1.2:` Aus →) "$\square$ Algebra in A",
aus →) "R ist **ana1** von $o, \square$",
aus →) "$2 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in A) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow ((q\_\square\_\alpha)\_\square\_\beta = (q\_\square\_\beta)\_\square\_\alpha)$"
folgt via **340-10**: $R(2)$ Funktion.

$\square$

Analysis: R ist **ana1** von $q, \Box$ und $\Box$ ist Algebra in A: $\mathsf{dom}\,(R(n))$, $\mathsf{ran}\,(R(n))$.

Ersterstellung: 27/05/15 **Letzte Änderung: 29/05/15**

341-1. Natürlich werden Aussagen über $\mathsf{dom}\,(R(n))$, wobei R **ana1** von $q, \Box$, $\Box$ Algebra in A, $n \in \mathsf{dom}\, R$, mit Induktion bewiesen.

341-1(Definition)

$$\mathsf{341.0}(x, y) = \{\omega : \mathsf{dom}\,(x(\omega)) \subseteq y\}.$$

341-2. Ungeachtet dessen, ob es sich bei x um eine Menge oder Unmenge handelt gilt $\{x\} \subseteq \mathcal{P}(x)$.

341-2(Satz)

a) $\{0\} \subseteq \mathcal{P}(x)$.

b) $\{x\} \subseteq \mathcal{P}(x)$.

c) *"$y \cup z \in \mathcal{P}(x)$" genau dann, wenn "$y, z \in \mathcal{P}(x)$".*

d) *Aus "$p \in q \in \mathcal{P}(x)$" folgt "$p \in x$".*

e) *Aus "r Relation" und "$\mathsf{dom}\, r \subseteq x$" und "$\mathsf{ran}\, r \subseteq y$" folgt "$r \subseteq x \times y$".*

f) *Aus "$r \subseteq x \times y$" folgt "r Relation" und "$\mathsf{dom}\, r \subseteq x$" und "$\mathsf{ran}\, r \subseteq y$".*

g) $\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1} = \{0\}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **341-2** `a)`

1: Via **0-28** gilt: $0 \in \mathcal{P}(x)$.

2: Aus 1"$0 \in \mathcal{P}(x)$" folgt via **1-8**: $\{0\} \subseteq \mathcal{P}(x)$.

Beweis **341-2** b)

1: Es gilt: $(x \text{ Menge}) \vee (x \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Menge.

2: Aus 1.1.Fall "x Menge"
folgt via **0-27**: $x \in \mathcal{P}(x)$.

3: Aus 2 "$x \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **1-8**: $\{x\} \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`1.2.Fall` x Unmenge.

2: Aus 1.2.Fall "x Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{x\} = 0$.

3: Via **folk** gilt: $0 \subseteq \mathcal{P}(x)$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $\{x\} \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{x\} \subseteq \mathcal{P}(x)$.

c) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $y \cup z \in \mathcal{P}(x)$.

1: Aus VS gleich "$y \cup z \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **folk**: $(y \cup z \subseteq x) \wedge (y \cup z \text{ Menge})$.

2.1: Aus 1 "$y \cup z \subseteq x \ldots$"
folgt via **folk**: $y, z \subseteq x$.

2.2: Aus 1 "$\ldots y \cup z$ Menge"
folgt via **folk**: y, z Menge.

3: Aus 2.1 "$y, z \subseteq x$" und
aus 2.2 "y, z Menge"
folgt via **folk**: $y, z \in \mathcal{P}(x)$.

c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $y, z \in \mathcal{P}(x)$.

Aus VS gleich "$y, z \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **2-27**: $y \cup z \in \mathcal{P}(x)$.

<u>Beweis **341-2**</u> `d)` `VS` gleich $p \in q \in \mathcal{P}(x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\dots q \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **folk**: $q \subseteq x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in q \dots$" und
aus `1`"$q \subseteq x$"
folgt via **0-4**: $p \in x$.

`e)` `VS` gleich $(r \text{ Relation}) \wedge (\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "r Relation…"
folgt via **10-4**: $r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\dots (\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq y)$"
folgt via **6-7**: $(\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r) \subseteq x \times y$.

`3:` Aus `1`"$r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$" und
aus `2`"$(\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r) \subseteq x \times y$"
folgt via **folk**: $r \subseteq x \times y$.

`f)` `VS` gleich $r \subseteq x \times y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$r \subseteq x \times y$"
folgt via **10-12**: $\boxed{r \text{ Relation}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$r \subseteq x \times y$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq \mathsf{dom}\,(x \times y)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$r \subseteq x \times y$"
folgt via **folk**: $\mathsf{ran}\, r \subseteq \mathsf{ran}\,(x \times y)$.

`2.1:` Via **7-22** gilt: $\mathsf{dom}\,(x \times y) \subseteq x$.

`2.2:` Via **7-22** gilt: $\mathsf{ran}\,(x \times y) \subseteq y$.

`3.1:` Aus `1.2`"$\mathsf{dom}\, r \subseteq \mathsf{dom}\,(x \times y)$" und
aus `2.1`"$\mathsf{dom}\,(x \times y) \subseteq x$"
folgt via **folk**: $\boxed{\mathsf{dom}\, r \subseteq x}$

`3.2:` Aus `1.3`"$\mathsf{ran}\, r \subseteq \mathsf{ran}\,(x \times y)$" und
aus `2.2`"$\mathsf{ran}\,(x \times y) \subseteq y$"
folgt via **folk**: $\boxed{\mathsf{ran}\, r \subseteq y}$

<u>Beweis **341-2**</u> g)

$$\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1} \overset{\mathbf{240-2(RekParDef)}}{=} \{0\} \setminus \mathcal{U}_{-1} \overset{\mathbf{296-10(Def)}}{=} \{0\} \setminus 0 \overset{\mathbf{folk}}{=} \{0\}.$$

$\square$

341-3. Eigenartig. Ich dachte, ich hätte dies bereits bewiesen.

341-3(Satz) *Es gelte:*

→) *R ist* **ana1** *von q, x.*

→) $p \in n \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt:

a) $p, 1 + p \in \mathsf{dom}\, R$.

b) $p, 1 + p \in \mathbb{N}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **341-3**

1: Aus →) " R ist **ana1** von q, x "
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

2.1: Aus →) " $p \in n \in \mathsf{dom}\, R$ " und
aus 1 " $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ "
folgt via **338-8**: $p \in \mathsf{dom}\, R$.

2.2: Aus →) " $p \in n \in \mathsf{dom}\, R$ " und
aus 1 " $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ "
folgt via **338-9**: $1 + p \in \mathsf{dom}\, R$.

3.a): Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $p, 1 + p \in \mathsf{dom}\, R$.

4.b): Aus →) " R ist **ana1** von q, x " und
aus 3.a) " $p, 1 + p \in \mathsf{dom}\, R$ "
folgt via **340-4**: $p, 1 + p \in \mathbb{N}$.

□

341-4. Selbsterklärende Aussagen der Mengenlehre erscheinen.

341-4(Satz)

a) *Aus "$p \in y$" und "$x \subseteq z$" folgt "$\{p\} \cup x \subseteq y \cup z$".*

b) $\mathcal{P}(x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ x_{\mathrm{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}(x)$.

Beweis **341-4** a) VS gleich $(p \in y) \wedge (x \subseteq z)$.

1: Aus VS gleich "$p \in y \ldots$"
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq y$.

2: Aus 1"$\{p\} \subseteq y$" und
aus VS gleich "$\ldots x \subseteq z$"
folgt via **2-13**: $\{p\} \cup x \subseteq y \cup z$.

<u>Beweis **341-4**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{P}(x)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ x_{\mathrm{sngltn}}$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathcal{P}(x)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ x_{\mathrm{sngltn}}$"
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in \mathcal{P}(x)) \wedge (\Phi \in x_{\mathrm{sngltn}}) \wedge (\alpha = \Omega \cup \Phi).$$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathcal{P}(x) \ldots$"
folgt via **folk**: $(\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \subseteq x)$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Phi \in x_{\mathrm{sngltn}} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Φ Menge.

`3.3:` Aus `2`"$\ldots \Phi \in x_{\mathrm{sngltn}} \ldots$"
folgt via **27-3**: $\exists \Psi : (\Psi \in x) \wedge (\Phi = \{\Psi\})$.

`4.1:` Aus `3.1`"Ω Menge$\ldots$" und
aus `3.2`"Φ Menge"
folgt via $\cup$**Axiom**: $\Omega \cup \Phi$ Menge.

`4.2:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega \cup \Phi$" und
aus `3.3`"$\ldots \Phi = \{\Psi\}$"
folgt: $\alpha = \Omega \cup \{\Psi\}$.

`4.3:` Aus `3.3`"$\ldots \Psi \in x \ldots$" und
aus `3.1`"$\ldots \Omega \subseteq x$"
folgt via **297-7**: $\{\Psi\} \cup \Omega \subseteq x$.

`5.1:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega \cup \Phi$" und
aus `4.1`
folgt: α Menge.

`5.2:` Via $\cup$**KG** gilt: $\Omega \cup \{\Psi\} = \{\Psi\} \cup \Omega$.

`6:` Aus `4.2` und
aus `5.2`
folgt: $\alpha = \{\Psi\} \cup \Omega$.

`7:` Aus `6` und
aus `4.3`
folgt: $\alpha \subseteq x$.

...

...

Beweis **341-4** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{P}(x) \;{}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; x_{\mathrm{sngltn}}.$

...

`8:` Aus `5.1`"α Menge" und
aus `7`"$\alpha \subseteq x$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{P}(x).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(x) \;{}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; x_{\mathrm{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(x)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}(x) \;{}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; x_{\mathrm{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}(x).$

$\square$

341-5. Ist $n \in \mathsf{dom}\, R$, wobei R **ana1** von $q, \Box$ und $\Box$ eine Algebra in A ist, so ist $\mathsf{dom}\,(R(n))$ eine Teilklasse von A. Erstmalig wird "…folgt **p.def.**" eingesetzt, um die Zugehörigkeit zu einem Klassen-Term zu verifizieren.

341-5(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow\!)$ R *ist* **ana1** *von* $q, \Box$.

$\rightarrow\!)$ $n \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

b) $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

c) $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A$.

d) $R(n) \subseteq \mathcal{P}(A) \times (\{q\} \cup A)$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **341-5**

$$337.0(x,y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$$
$$341.0(x,y) = \{\omega : \mathsf{dom}\,(x(\omega)) \subseteq y\}.$$

Beweis **341-5** `a)`

`1.1:` Aus →) “ R ist **ana1** von $q, \square$ ” und
aus→) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **340-4**: $n \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus →) “ R ist **ana1** von $q, \square$ ”
folgt via **337-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`2:` Via **259-36** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) \subseteq \{0\}$.

`3:` Via **341-2** gilt: $\{0\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

`4:` Aus `2`“ $\mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) \subseteq \{0\}$ ” und
aus `3`“ $\{0\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ ”
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

`5:` Aus `1.2` und
aus `4`
folgt: $\mathsf{dom}\,(R(0)) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

`6:` Aus `5`“ $\mathsf{dom}\,(R(0)) \subseteq \mathcal{P}(A)$ ” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“ 0 Menge”
folgt **p.def.**: $0 \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A))$.

...

<u>Beweis</u> **341-5** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema7}}$ $(\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A))\,) \wedge (\alpha \in n)$

`8.1:` Aus `Thema7`“$\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A))\ \ldots$”
folgt **p.def.**: $\mathsf{dom}\,(R(\alpha)) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

`8.2:` Aus →) “R ist **ana1** von $q, \Box$”,
aus `Thema7`“$\ldots \alpha \in n$” und
aus →) “$n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **341-3**: $\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`9:` Aus →) “R ist **ana1** von $q, \Box$” und
aus `8.2`“$\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **337-3(Def)**: $R(1 + \alpha) = \mathsf{337.0}(R(\alpha), \Box)$.

`10:` Aus `9`
folgt: $\mathsf{dom}\,(R(1 + \alpha)) = \mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(R(\alpha), \Box)\,)$.

`11:` Aus →) “$\Box$ Algebra in A”
folgt via **340-1**:
$\mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(R(\alpha), \Box)\,) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(\alpha))\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} A_{\mathrm{sngltn}}$.

`12.1:` Aus `10` und
aus `11`
folgt: $\mathsf{dom}\,(R(1 + \alpha)) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(\alpha))\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} A_{\mathrm{sngltn}}$.

`12.2:` Aus `8.1`“$\mathsf{dom}\,(R(\alpha)) \subseteq \mathcal{P}(A)$”
folgt via **220-9**:
$\mathsf{dom}\,(R(\alpha))\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} A_{\mathrm{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}(A)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} A_{\mathrm{sngltn}}$.

`13.1:` Aus `12.1`“$\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(\alpha))\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} A_{\mathrm{sngltn}}$” und
aus `12.2`“$\mathsf{dom}\,(R(\alpha))\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} A_{\mathrm{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}(A)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} A_{\mathrm{sngltn}}$”
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\,(R(1 + \alpha)) \subseteq \mathcal{P}(A)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} A_{\mathrm{sngltn}}$.

`13.2:` Via **341-4** gilt: $\mathcal{P}(A)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} A_{\mathrm{sngltn}} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

`14:` Aus `13.1`“$\mathsf{dom}\,(R(1 + \alpha)) \subseteq \mathcal{P}(A)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} A_{\mathrm{sngltn}}$” und
aus `13.2`“$\mathcal{P}(A)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} A \subseteq \mathcal{P}(A)$”
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\,(R(1 + \alpha)) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

...

...

Beweis **341-5** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema7}}$ $(\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A))) \wedge (\alpha \in n)$

...

`15:` Aus `8.2`"... $1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **ElementAxiom**: $1+\alpha$ Menge.

`16:` Aus `14`"$\mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)) \subseteq \mathcal{P}(A)$" und
aus `15`"$1+\alpha$ Menge"
folgt **p.def.**: $1+\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A))$.

Ergo `Thema7`:

`A1`	"$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A))) \wedge (\alpha \in n)) \Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A)))$"

`8:` Aus `1.1`"$n \in \mathbb{N}$",
aus `6`"$0 \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A))$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A))) \wedge (\alpha \in n))$
$\Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A)))$"
folgt via **337-12**: $n \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A))$.

`9:` Aus `8`"$n \in \mathsf{341.0}(R, \mathcal{P}(A))$"
folgt **p.def.**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

`b)`

`1:` Aus →) "$\square$ Algebra in A",
aus →) "R ist **ana1** von $q, \square$" und
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

`2:` Aus →) "R ist **ana1** von $q, \square$" und
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **338-12**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`3:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(A)$" und
aus `2`"$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt via **2-12**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

<u>Beweis **341-5** `c)`</u>

`1:` Es gilt: $(n=0)\vee(0\neq n)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n=0$.

`2:` Via **259-36** gilt: $\mathsf{ran}\,(\{(0,q)\})\subseteq\{q\}$.

`3:` Aus →) “R ist **ana1** von q,x”
folgt via **337-3(Def)**: $R(0)=\{(0,q)\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\mathsf{ran}\,(R(0))\subseteq\{q\}$.

`5:` Via **folk** gilt: $\{q\}\subseteq\{q\}\cup A$.

`6:` Aus `4`“$\mathsf{ran}\,(R(0))\subseteq\{q\}$” und
aus `5`“$\{q\}\subseteq\{q\}\cup A$”
folgt via **folk**: $\mathsf{ran}\,(R(0))\subseteq\{q\}\cup A$.

`7:` Aus `6` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $\mathsf{ran}\,(R(n))\subseteq\{q\}\cup A$.

...

Beweis **341-5** `c)` ...

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $0 \neq n.$

`2:` Aus →) "R ist **ana1** von q, x" und
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **340-4**: $n \in \mathbb{N}.$

`3:` Aus `1.2.Fall` "$0 \neq n$" und
aus 2 "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **300-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega).$

`4.1:` Aus 3 "$\ldots n = 1 + \Omega$" und
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt: $1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R.$

`4.2:` Aus 3 "$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **239-5**: $\Omega \in 1 + \Omega.$

`5:` Aus →) "R ist **ana1** von $q, \square$",
aus `4.2` "$\Omega \in 1 + \Omega$" und
aus `4.1` "$1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **341-3**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, R.$

`6:` Aus →) "R ist **ana1** von $q, \square$",
aus 5 "$\Omega \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `4.1` "$1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(1 + \Omega) = 337.0(R(\Omega), \square)\,.$

`7.1:` Aus 6 und
aus 3 "$\ldots n = 1 + \Omega$"
folgt: $R(n) = 337.0(R(\Omega), \square)\,.$

`7.2:` Aus →) "$\square$ Algebra in A"
folgt via **340-1**: $\mathsf{ran}\,(337.0(R(\Omega), \square)\ \subseteq A.$

`8:` Aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A.$

`9:` Via **folk** gilt: $A \subseteq \{q\} \cup A.$

`10:` Aus 8 "$\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$" und
aus 8 "$A \subseteq \{q\} \cup A$"
folgt via **folk**: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A.$

<u>Beweis **341-5** `d)`</u>

`1.1:` Aus →) “ R ist **ana1** von $q, \square$ ” und
aus →) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **339-7**: $R(n)$ Relation.

`1.2:` Aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ R ist **ana1** von q, x ” und
aus →) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

`1.3:` Aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ R ist **ana1** von q, x ” und
aus →) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A$.

`2:` Aus `1.1` “ $R(n)$ Relation ” ,
aus `1.2` “ $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(A)$ ” und
aus `1.3` “ $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A$ ”
folgt via **341-2**: $R(n) \subseteq \mathcal{P}(A) \times (\{q\} \cup A)$.

$\square$

341-6. Ähnlich wie $\mathtt{341.0}(x, y)$ bereitet $\mathtt{341.1}(x, y)$ Weiteres vor.

341-6(Definition)

$$\mathtt{341.1}(x, y) = \{\omega : x \cap (\mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega}) \subseteq \mathsf{dom}\,(y(\omega))\}.$$

RECH-**Notation**.

341-7. Über $\mathsf{337.0}(x,y)$ soll zwischenspielerisch Weiteres ausgesagt werden.

<u>**341-7(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $(E,a)\in x$.

$\rightarrow\!)$ $p\notin E$.

$\rightarrow\!)$ $(a,p)\in\mathsf{dom}\,y$.

Dann folgt “$\{p\}\cup E\in\mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(x,y)\,)$”.

$$\mathsf{337.0}(x,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta):(\lambda\notin\mu)\wedge(\exists\Omega:((\mu,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\lambda),\eta)\in y))\}$$

<u>Beweis **341-7**</u>

1: Aus $\rightarrow\!)$ “$(p,a)\in\mathsf{dom}\,y$”
folgt via **folk**: $\exists\Omega:((p,a),\Omega)\in y$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ “$p\notin E$”,
aus $\rightarrow\!)$ “$(E,a)\in x$” und
aus 1 “$\ldots((a,p),\Omega)\in y$”
folgt via **337-2**: $(\{p\}\cup E,\Omega)\in\mathsf{337.0}(x,y)$.

3: Aus 2 “$(\{p\}\cup E,\Omega)\in\mathsf{337.0}(x,y)$”
folgt via **folk**: $\{p\}\cup E\in\mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(x,y)\,)$.

$\square$

341-8. Für die Elemente von $\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, sind Darstellungen der Form $\{p\} \cup y$ mit $p \notin y$ verfügbar.

341-8(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $n \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow$) $x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

Dann folgt $\exists \Omega$:

`e.1)` $\Omega \in x$.

`e.2)` $x \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`e.3)` $x = \{\Omega\} \cup (x \setminus \{\Omega\})$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **341-8**

1: Aus $\rightarrow$)"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **300-10**: $0 \notin \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

2: Aus $\rightarrow$)"$x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$" und
aus 1"$0 \notin \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$"
folgt via **folk**: $x \neq 0$.

3: Aus 2"$x \neq 0$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

4: Aus $\rightarrow$)"$n \in \mathbb{N}$",
aus 3"$\ldots \Omega \in x$" und
aus $\rightarrow$)"$x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$"
folgt via **296-12**: $x \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

5: Aus 3"$\ldots \Omega \in x$"
folgt via **5-19**: $x = \{\Omega\} \cup (x \setminus \{\Omega\})$.

6: Aus 3,
aus 4 und
aus 5
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (x \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \wedge (x = \{\Omega\} \cup (x \setminus \{\Omega\}))$.

□

341-9. Im vermutlich interessantesten Fall $q \in A$ ergeben sich für jedes R, das **ana1** von $q, \Box$ mit einer Algebra $\Box$ in A ist, weitreichende Konsequenzen. Zunächst sollen unter anderem $\mathsf{dom}\,(R(n))$, $n \in \mathbb{N}$, betrachtet werden. Die Beweis-Reihenfolge ist `acb)`.

341-9(Satz) *Es gelte:*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) R *ist* **ana1** *von* $q, \Box$.

→) $q \in A$.

→) $n \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt:

a) $R(n) \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$.

b) $\mathsf{dom}\,(R(n)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

c) $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **341-9**

$$341.1(x,y) = \{\omega : x \cap (\mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega}) \subseteq \mathsf{dom}\,(y(\omega))\}$$

$$337.0(x,y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$$

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis</u> **341-9** `ac)`

`1.1:` Aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ R ist **ana1** von $q, \square$ ” und
aus →) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **341-5**: $R(n) \subseteq \mathcal{P}(A) \times (\{q\} \cup A)$.

`1.2:` Aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ R ist **ana1** von $q, \square$ ” und
aus →) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **341-5**: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup A$.

`2:` Aus →) “ $q \in A$ ”
folgt via **308-8**: $\{q\} \cup A = A$.

`3.a):` Aus `1.1` und
aus `2`
folgt: $R(n) \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$.

`3.c):` Aus `1.2` und
aus `2`
folgt: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$.

`b)`

`1.1:` Aus →) “ R ist **ana1** von $q, \square$ ” und
aus→) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **340-4**: $n \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus →) “ R ist **ana1** von $q, \square$ ”
folgt via **337-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`1.3:` Aus →) “ $q \in A$ ”
folgt via **308-3**: $\mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) = 1$.

`1.4:` Via **341-2** gilt: $\{0\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

`2:` Aus `1.4` “ $\{0\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ ”
folgt via **folk**: $\mathcal{P}(A) \cap \{0\} = \{0\}$.

`3:` $\mathsf{dom}\,(R(0)) \stackrel{1.2}{=} \mathsf{dom}\,(\{(0, q)\}) \stackrel{1.3}{=} 1 \stackrel{\mathbf{95-1(Def)}}{=} \{0\} \stackrel{2}{=} \mathcal{P}(A) \cap \{0\}$
$\stackrel{\mathbf{341-2}}{=} \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1}) \stackrel{\mathbf{+schola}}{=} \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0})$.

`4:` Aus `3` “ $\mathsf{dom}\,(R(0)) = \ldots = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0})$ ”
folgt via **folk**: $\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(0))$.

...

<u>Beweis</u> **341-9** `b)` ...

`5:` Aus `4`“$\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(0))$” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge”
folgt **p.def.**: $0 \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(A), R)$.

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $(\alpha \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(A), R)) \wedge (\alpha \in n)$

`7.1:` Aus →)“R ist **ana1** von $q, \Box$”,
aus `Thema6`“$\ldots \alpha \in n$” und
aus →)“$n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **341-3**: $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`7.2:` Aus →)“R ist **ana1** von $q, \Box$”,
aus `Thema6`“$\ldots \alpha \in n$” und
aus →)“$n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **341-3**: $\alpha \in \mathbb{N}$.

`7.3:` Aus `Thema6`“$\alpha \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(A), R)$”
folgt **p.def.**: $\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(\alpha))$.

`8.1:` Aus `7.1`“$\ldots 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **ElementAxiom**: $1+\alpha$ Menge.

`8.2:` Aus `7.2`“$\alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **297-4**: $-1+(1+\alpha) = \alpha$.

`8.3:` Aus →)“$\Box$ Algebra in A”,
aus →)“R ist **ana1** von $q, \Box$”,
aus →)“$q \in A$” und
aus `7.1`“$\alpha \ldots \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $R(\alpha) \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$.

`8.4:` Aus →)“R ist **ana1** von $q, \Box$” und
aus `7.1`“$\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **337-3(Def)**: $R(1+\alpha) = \mathtt{337.0}(R(\alpha), \Box)$.

...

...

Beweis **341-9** `b)` ...

`Thema6` $(\alpha \in \mathtt{341.1}(\mathcal{P}(A), R)) \wedge (\alpha \in n)$

...

`Thema9` $\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)})$.

`10:` Aus `Thema9` und
aus `8.2`
folgt: $\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{\alpha})$.

`11:` Aus `10`“$\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{\alpha})$”
folgt via **folk**: $\beta \in \mathcal{P}(A), \mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{\alpha}$.

`12:` Aus `7.2`“$\alpha \in \mathbb{N}$” und
aus `11`“$\beta \in \ldots \mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{\alpha}$”
folgt via **341-8**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in \beta) \wedge (\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_{\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})$$
$$\wedge (\beta = \{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\})).$$

`13.1:` Aus `12`“$\ldots \Omega \in \beta \ldots$” und
aus `11`“$\beta \in \mathcal{P}(A) \ldots$”
folgt via **341-2**: $\Omega \in A$.

`13.2:` Aus `12`“$\ldots \beta = \{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\})$” und
aus `11`“$\beta \in \mathcal{P}(A) \ldots$”
folgt: $\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \in \mathcal{P}(A)$.

`14:` Aus `13.2`“$\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \in \mathcal{P}(A)$”
folgt via **341-2**: $\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{P}(A)$.

`15:` Aus `14`“$\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{P}(A)$” und
aus `12`“$\ldots \beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{U}_{\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha} \ldots$”
folgt via **folk**:
$$\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}).$$

`16:` Aus `15`“$\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})$” und
aus `7.3`“$\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(\alpha))$”
folgt via **folk**: $\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathsf{dom}\,(R(\alpha))$.

...

...

...

Beweis **341-9** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $(\alpha \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(A), R)) \wedge (\alpha \in n)$

...

$\boxed{\texttt{Thema9}}$ $\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)})$.

...

17: Aus 16 "$\beta \setminus \{\Omega\} \in \mathsf{dom}\,(R(\alpha))$"
folgt via **folk**: $\exists \Phi : (\beta \setminus \{\Omega\}, \Phi) \in R(\alpha)$.

18: Aus 17 "$\ldots (\beta \setminus \{\Omega\}, \Phi) \in R(\alpha)$" und
aus 8.3 "$R(\alpha) \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$"
folgt via **0-4**: $(\beta \setminus \{\Omega\}, \Phi) \in \mathcal{P}(A) \times A$.

19: Aus 18 "$(\beta \setminus \{\Omega\}, \Phi) \in \mathcal{P}(A) \times A$"
folgt via **folk**: $\Phi \in A$.

20: Via **5-14** gilt: $\Omega \notin \beta \setminus \{\Omega\}$.

21: Aus →) "$\square$ Algebra in A",
aus 13.1 "$\Omega \in A$",
aus 19 "$\Phi \in A$",
aus 20 "$\Omega \notin \beta \setminus \{\Omega\}$" und
aus 17 "$(\beta \setminus \{\Omega\}, \Phi) \in R(\alpha)$"
folgt via **340-1**:
$(\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}, \Phi\_\square\_\Omega) \in \mathsf{337.0}(R(\alpha), \square)$.

22: Aus 21 und
aus 8.4
folgt: $(\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}), \Phi\_\square\_\Omega) \in R(1 + \alpha)$.

23: Aus 22 "$(\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}), \Phi\_\square\_\Omega) \in R(1+\alpha)$"
folgt via **folk**:
$\{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\}) \in \mathsf{dom}\,(R(1 + \alpha))$.

24: Aus 23 und
aus 12 "$\ldots \beta = \{\Omega\} \cup (\beta \setminus \{\Omega\})$"
folgt: $\beta \in \mathsf{dom}\,(R(1 + \alpha))$.

...

...

Beweis **341-9** `b)` ...

`Thema6` $(\alpha \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(A), R)) \wedge (\alpha \in n)$

...

Ergo `Thema9`:
$\forall \beta : (\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)})) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(R(1+\alpha)))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1` | "$\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(1+\alpha))$"

`10:` Aus `A1` gleich "$\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+\alpha} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\alpha)}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(1+\alpha))$" und
aus `8.1`"$1+\alpha$ Menge"
folgt **p.def.**: $1+\alpha \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(A), R)$.

Ergo `Thema6`:

`A2` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(A), R)) \wedge (\alpha \in n)) \Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(A), R))$"

`7:` Aus `1.1`"$n \in \mathbb{N}$",
aus `5`"$0 \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(A), R)$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(A), R)) \wedge (\alpha \in n)) \Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(A), R))$"
folgt via **337-12**: $n \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(A), R)$.

`8:` Aus `7`"$n \in \mathsf{341.1}(\mathcal{P}(A), R)$"
folgt **p.def.**: $\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(n))$.

`9:` Aus →)"$\square$ Algebra in A",
aus →)"R ist **ana1** von q, x" und
aus →)"$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **341-5**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

`10:` Aus `9`"$\mathsf{dom}\,(R(n)) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$" und
aus `8`"$\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \subseteq \mathsf{dom}\,(R(n))$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

□

Algebra: $\mathsf{337.0}(f, \square)$, f Funktion, $\square$ Algebra in A.

Ersterstellung: 01/06/15 **Letzte Änderung: 02/06/15**

342-1. Nun sollen die Elemente von $\mathsf{337.0}(f, \square)$ für Funktionen f und Algebren $\square$ in A untersucht werden.

342-1(Satz)

a) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$\square$ *Algebra in* A" *und* "$w \in \mathsf{337.0}(f, \square)$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi : (\Phi, f(\Omega) \in A) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\Phi \notin \Omega)$
$\wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Omega, f(\Omega)\_\square\_\Phi))$".

b) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$\square$ *Algebra in* A" *und* "$(u, v) \in \mathsf{337.0}(f, \square)$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi : (\Phi, f(\Omega) \in A) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\Phi \notin \Omega)$
$\wedge (u = \{\Phi\} \cup \Omega) \wedge (v = f(\Omega)\_\square\_\Phi)$".

c) *Aus* "f *Funktion*"
und "$\square$ *Algebra in* A"
und "$p, f(E) \in A$"
und "$p \notin E$"
folgt "$(\{p\} \cup E, f(E)\_\square\_p) \in \mathsf{337.0}(f, \square)$".

ALG-Notation.

$$\mathsf{337.0}(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$$

<u>Beweis **342-1**</u> `a)` `VS` gleich (f Funktion) $\wedge$ ($\square$ Algebra in A) $\wedge$ ($w \in 337.0(f, \square)$).

`1:` Aus `VS` gleich "... ($\square$ Algebra in A) $\wedge$ ($w \in 337.0(f, \square)$)"
folgt via **340-1**: $\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega, \Phi \in A) \wedge ((\Psi, \Omega) \in f) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega \_ \square \_ \Phi))$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `1`"... $(\Psi, \Omega) \in f$ ..."
folgt via **18-20**: $\Omega = f(\Psi)$.

`2.2:` Aus `1`"... $(\Psi, \Omega) \in f$ ..."
folgt via **folk**: $\Psi \in \mathsf{dom}\, f$.

`3.1:` Aus `1`"... Ω ... $\in A$ ..." und
aus `2.1`
folgt: $f(\Psi) \in A$.

`3.2:` Aus `2.1`
folgt: $\Omega \_ \square \_ \Phi = f(\Psi) \_ \square \_ \Phi$.

`4:` Aus `3.2`"$\Omega \_ \square \_ \Phi = f(\Psi) \_ \square \_ \Phi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega \_ \square \_ \Phi) = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi) \_ \square \_ \Phi)$.

`5:` Aus `1`"... $w = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Omega \_ \square \_ \Phi)$" und
aus `4`
folgt: $w = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi) \_ \square \_ \Phi)$.

`6:` Aus `1`"$\exists$ ... Φ, Ψ ...",
aus `1`"... $\Phi \in A$ ...",
aus `3.1`,
aus `2.2`,
aus `1`"... $\Phi \notin \Psi$ ..." und
aus `5`
folgt: $\exists \Phi, \Psi : (\Phi, f(\Psi) \in A) \wedge (\Psi \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\Phi \notin \Psi) \wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Psi, f(\Psi) \_ \square \_ \Phi))$.

`7:` Aus `6`
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Phi, f(\Omega) \in A) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\Phi \notin \Omega) \wedge (w = (\{\Phi\} \cup \Omega, f(\Omega) \_ \square \_ \Phi))$.

<u>Beweis **342-1**</u> `b)`

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A) \wedge ((u, v) \in \mathsf{337.0}(f, \Box)\,)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A) \wedge ((u, v) \in \mathsf{337.0}(f, \Box)\,)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Phi, f(\Omega) \in A) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\Phi \notin \Omega)$$
$$\wedge ((u, v) = (\{\Phi\} \cup \Omega, f(\Omega)_\_\Box_\_\Phi)).$$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (u, v) \in \mathsf{337.0}(f, \Box)$ "
folgt via **ElementAxiom**: (u, v) Menge.

`2:` Aus `1.1`"$\ldots (u, v) = (\{\Phi\} \cup \Omega, f(\Omega)_\_\Box_\_\Phi)$" und
aus `1.2`"(u, v) Menge"
folgt via **IGP**: $(u = \{\Phi\} \cup \Omega) \wedge (v = f(\Omega)_\_\Box_\_\Phi)$.

`3:` Aus `1.1`"$\exists \Omega, \Phi : (\Phi, f(\Omega) \in A) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\Phi \notin \Omega) \ldots$" und
aus `2`
folgt:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Phi, f(\Omega) \in A) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\Phi \notin \Omega)$$
$$\wedge (u = \{\Phi\} \cup \Omega) \wedge (v = f(\Omega)_\_\Box_\_\Phi).$$

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (p, f(E) \in A) \wedge (p \notin E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f(E) \in A \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $f(E)$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$ " und
aus `1`"$f(E)$ Menge"
folgt via **304-1**: $(E, f(E)) \in f$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots f(E) \in A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin E$" und
aus `2`"$(E, f(E)) \in f$"
folgt via **340-1**: $(\{p\} \cup E, f(E)_\_\Box_\_p) \in \mathsf{337.0}(f, \Box)$.

$\Box$

342-2. Jaja, die Mengenlehre liefert nach wie vor Hilfreiches. Aussage `b)` ist ein Spezialfall von **5-22**, doch beim Nachschlagen komme ich verspätet auf die Idee, **5-22** anzuwenden. Also wird dieses Resultat nun explizit in das LW aufgenommen.

342-2(Satz)

`a)` $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup (z \setminus x)$.

`b)` $\{p\} \cup x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

`c)` *"$\{p, q\} \cap x = 0$" genau dann, wenn "$p, q \notin x$".*

`d)` *Aus "$\{p\} \cup x = \{q\} \cup y$" folgt "$\{p\} \cup x = \{p, q\} \cup (x \setminus \{q\})$"*
und "$\{q\} \cup y = \{q, p\} \cup (y \setminus \{p\})$"
und "$\{p, q\} \cup (x \setminus \{q\}) = \{q, p\} \cup (y \setminus \{p\}$"
und "$\{p, q\} \cup (x \setminus \{q\}) = \{p, q\} \cup (y \setminus \{p\}$".

`e)` *Aus "$\{p\} \cup x = \{q\} \cup y$" und "$p \notin x$" und "$q \notin y$"*
folgt "$x \setminus \{q\} = y \setminus \{p\}$".

`f)` *Aus "$\{p\} \cup x = \{q\} \cup y$" und "$p \notin x$" und "$q \notin y$" und "$p = q$"*
folgt "$x = y$".

`g)` *Aus "$\{p\} \cup x = \{q\} \cup y$" und "$p \notin x$" und "$q \notin y$" und "$p \neq q$"*
folgt "$x = \{q\} \cup (x \setminus \{q\})$"
und "$y = \{p\} \cup (y \setminus \{p\})$"
und "$\exists \Omega : (p, q, \notin \Omega) \wedge (x = \{q\} \cup \Omega) \wedge (y = \{p\} \cup \Omega)$
$\wedge (\Omega = x \setminus \{q\}) \wedge (\Omega = y \setminus \{p\})$".

Beweis **342-2** `a)`

`1.1:` Via **folk** gilt: $z \setminus x \subseteq z$.

`2:` Aus `1.1` "$z \setminus x \subseteq z$"
folgt via **folk**: $(x \cup y) \cup (z \setminus y) \subseteq (x \cup y) \cup z$.

`3:` Via **AG**$\cup$ gilt: $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: `A1` | "$(x \cup y) \cup (z \setminus y) \subseteq x \cup (y \cup z)$"

...

<u>Beweis</u> **342-2** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in x \cup (y \cup z)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x \cup (y \cup z)$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in x) \vee (\alpha \in y \cup z)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\alpha \in x) \vee ((\alpha \in y \cup z) \wedge (\neg(\alpha \in x)))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\alpha \in x) \vee ((\alpha \in y \cup z) \wedge (\alpha \notin x))$.

`5:` Aus `4`"$(\alpha \in x) \vee ((\alpha \in y \cup z) \wedge (\alpha \notin x))$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in x) \vee (((\alpha \in y) \vee (\alpha \in z)) \wedge (\alpha \notin x))$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\alpha \in x) \vee ((\alpha \in y) \vee ((\alpha \in z) \wedge (\alpha \notin x)))$.

`7:` Aus `6`
folgt: $((\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)) \vee ((\alpha \in z) \wedge (\alpha \notin x))$.

`8:` Aus `7`"$((\alpha \in x) \vee (\alpha \in y)) \vee ((\alpha \in z) \wedge (\alpha \notin x))$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in x \cup y) \vee ((\alpha \in z) \wedge (\alpha \notin x))$.

`9:` Aus `8`"$(\alpha \in x \cup y) \vee ((\alpha \in z) \wedge (\alpha \notin x))$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in x \cup y) \vee (\alpha \in z \setminus x)$.

`10:` Aus `9`"$(\alpha \in x \cup y) \vee (\alpha \in z \setminus y)$"
folgt via **folk**: $\alpha \in (x \cup y) \cup (z \setminus y)$.

Ergo `Thema1.2.`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cup (y \cup z)) \Rightarrow (\alpha \in (x \cup y) \cup (z \setminus x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$x \cup (y \cup z) \subseteq (x \cup y) \cup (z \setminus x)$"

`1.3:` Aus `A2` gleich "$x \cup (y \cup z) \subseteq (x \cup y) \cup (z \setminus x)$" und
aus `A1` gleich "$(x \cup y) \cup (z \setminus x) \subseteq x \cup (y \cup z)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup (z \setminus x)$.

`b)`
Via **5-22** gilt: $\{p\} \cup x = \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$.

<u>Beweis **342-2**</u> `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\{p,q\}\cap x = 0.$

`1:` Es gilt: $(p\in x)\vee(q\in x)\vee(p,q\notin x)$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p\in x.$

`2:` Aus `1.1.Fall` “$p\in x$” folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`3:` Aus `2` “p Menge” folgt via **4-9**: $p\in\{p,q\}.$

`4:` Aus `3` “$p\in\{p,q\}$” und aus `1.1.Fall` “$p\in x$” folgt via **folk**: $p\in\{p,q\}\cap x.$

`5:` Aus `4` “$p\in\{p,q\}\cap x$” folgt via **folk**: $0\neq\{p,q\}\cap x.$

`6:` Nach `VS` gilt: $\{p,q\}\cap x = 0.$

`1.2.Fall` $q\in x.$

`2:` Aus `1.2.Fall` “$q\in x$” folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`3:` Aus `2` “q Menge” folgt via **4-9**: $p\in\{p,q\}.$

`4:` Aus `3` “$q\in\{p,q\}$” und aus `1.2.Fall` “$q\in x$” folgt via **folk**: $q\in\{p,q\}\cap x.$

`5:` Aus `4` “$q\in\{p,q\}\cap x$” folgt via **folk**: $0\neq\{p,q\}\cap x.$

`6:` Nach `VS` gilt: $\{p,q\}\cap x = 0.$

`1.3.Fall` $p,q\notin x.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $p,q\notin x.$

Beweis **342-2** c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $p, q \notin x$.

1: Es gilt: $(0 \neq \{p,q\} \cap x) \vee (\{p,q\} \cap x = 0)$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $0 \neq \{p,q\} \cap x$.

2: Aus 1.1.Fall "$0 \neq \{p,q\} \cap x$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in \{p,q\} \cap x$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in \{p,q\} \cap x$"
folgt via **folk**: $(\Omega \in \{p,q\}) \wedge (\Omega \in x)$.

4: Aus 3 "$\Omega \in \{p,q\} \ldots$"
folgt via **folk**: $(\Omega = p) \vee (\Omega = q)$.

Fallunterscheidung

4.1.Fall $\Omega = p$.

5: Aus 4.1.Fall "$\Omega = p$" und
aus 3 "$\ldots \Omega \in x$"
folgt: $p \in x$.

6: Nach VS gilt: $p \notin x$.

4.2.Fall $\Omega = q$.

5: Aus 4.2.Fall "$\Omega = q$" und
aus 3 "$\ldots \Omega \in x$"
folgt: $q \in x$.

6: Nach VS gilt: $q \notin x$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\{p,q\} \cap x = 0$.

Ende **wf**Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\{p,q\} \cap x = 0$.

<u>Beweis **342-2**</u> `d) VS` gleich $\{p\} \cup x = \{q\} \cup y.$

`1.1:` $\{p\} \cup x \stackrel{\mathbf{5-22}}{=} ((\{p\} \cup x) \cap \{q\}) \cup ((\{p\} \cup x) \setminus \{q\})$
$\stackrel{\mathtt{VS}}{=} ((\{q\} \cup y) \cap \{q\}) \cup ((\{p\} \cup x) \setminus \{q\})$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (\{q\} \cap (\{q\} \cup y)) \cup ((\{p\} \cup x) \setminus \{q\}) \stackrel{\mathbf{VG}\cap\cup}{=} \{q\} \cup ((\{p\} \cup x) \setminus \{q\})$
$\stackrel{\mathbf{238-3}}{=} \{q\} \cup ((\{p\} \setminus \{q\}) \cup (x \setminus \{q\})) \stackrel{\mathbf{AG}\cup}{=} (\{q\} \cup (\{p\} \setminus \{q\})) \cup (x \setminus \{q\})$
$\stackrel{\mathbf{5-22}}{=} (\{p\} \cup \{q\}) \cup (x \setminus \{q\}) \stackrel{\mathbf{4-11}}{=} \{p, q\} \cup (x \setminus \{q\}).$

`1.2:` $\{q\} \cup y \stackrel{\mathbf{5-22}}{=} ((\{q\} \cup y) \cap \{p\}) \cup ((\{q\} \cup y) \setminus \{p\})$
$\stackrel{\mathtt{VS}}{=} ((\{p\} \cup x) \cap \{p\}) \cup ((\{q\} \cup y) \setminus \{p\})$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (\{p\} \cap (\{p\} \cup x)) \cup ((\{q\} \cup y) \setminus \{p\}) \stackrel{\mathbf{VG}\cap\cup}{=} \{p\} \cup ((\{q\} \cup y) \setminus \{p\})$
$\stackrel{\mathbf{238-3}}{=} \{p\} \cup ((\{q\} \setminus \{p\}) \cup (y \setminus \{p\})) \stackrel{\mathbf{AG}\cup}{=} (\{p\} \cup (\{q\} \setminus \{p\})) \cup (y \setminus \{p\})$
$\stackrel{\mathbf{5-22}}{=} (\{q\} \cup \{p\}) \cup (y \setminus \{p\}) \stackrel{\mathbf{4-11}}{=} \{q, p\} \cup (y \setminus \{p\}).$

`2.1:` Aus `1.1`

folgt: $\boxed{\{p\} \cup x = \{p, q\} \cup (x \setminus \{q\})}$

`2.2:` Aus `1.2`

folgt: $\boxed{\{q\} \cup y = \{q, p\} \cup (y \setminus \{p\})}$

`3:` Aus `2.1`,
aus `2.2` und
aus `VS`

folgt: $\boxed{\{p, q\} \cup (x \setminus \{q\}) = \{q, p\} \cup (y \setminus \{p\})}$

`4:` Via **4-11** gilt: $\{q, p\} = \{p, q\}.$

`5:` Aus `3` und
aus `4`

folgt: $\boxed{\{p, q\} \cup (x \setminus \{q\}) = \{p, q\} \cup (y \setminus \{p\})}$

<u>Beweis **342-2**</u> `e)` `VS` gleich $(\{p\} \cup x = \{q\} \cup y) \wedge (p \notin x) \wedge (q \notin y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \notin x \ldots$"
folgt via **5-4**: $p \notin x \setminus \{q\}$.

`1.2:` Via **5-14** gilt: $q \notin x \setminus \{q\}$.

`1.3:` Via **5-14** gilt: $p \notin y \setminus \{p\}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \notin y$"
folgt via **5-4**: $q \notin y \setminus \{p\}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$p \notin x \setminus \{q\}$" und
aus `1.2`"$q \notin x \setminus \{q\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\{p, q\} \cap (x \setminus \{q\}) = 0$.

`2.2:` Aus `1.3`"$p \notin y \setminus \{p\}$" und
aus `1.4`"$q \notin y \setminus \{p\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\{p, q\} \cap (y \setminus \{p\}) = 0$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\{p\} \cup x = \{q\} \cup y \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$$\{p, q\} \cup (x \setminus \{q\}) = \{p, q\} \cup (y \setminus \{p\}).$$

`3:` Aus `2.3`"$\{p, q\} \cup (x \setminus \{q\}) = \{p, q\} \cup (y \setminus \{p\})$",
aus `2.1`"$\{p, q\} \cap (x \setminus \{q\}) = 0$" und
aus `2.2`"$\{p, q\} \cap (y \setminus \{p\}) = 0$"
folgt via **323-25**: $x \setminus \{q\} = y \setminus \{p\}$.

<u>Beweis **342-2**</u> `f)` `VS` gleich $(\{p\} \cup x = \{q\} \cup y) \wedge (p \notin x) \wedge (q \notin y) \wedge (p = q)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p = q$"
folgt: $\{p\} \cup y = \{q\} \cup y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \notin y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p = q$"
folgt: $p \notin y$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \{p\} \cup x = \{q\} \cup y \ldots$" und
aus `1`
folgt: $\{p\} \cup x = \{p\} \cup y$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \notin x \ldots$"
folgt via **2-30**: $\{p\} \cap x = 0$.

`2.3:` Aus `1.2`"$p \notin y$"
folgt via **2-30**: $\{p\} \cap y = 0$.

`3:` Aus `2.1`"$\{p\} \cup x = \{q\} \cup y$",
aus `2.2`"$\{p\} \cap x = 0$" und
aus `2.3`"$\{p\} \cap y = 0$"
folgt via **323-25**: $x = y$.

Beweis **342-2** `g)` `VS` gleich $(\{p\} \cup x = \{q\} \cup y) \wedge (p \notin x) \wedge (q \notin y) \wedge (p \neq q)$.

`1.1:` Es gilt: $(q \in x) \vee (q \notin x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $q \in x$.

Aus `1.1.1.Fall` "$q \in x$"
folgt via **5-19**: $x = \{q\} \cup (x \setminus \{q\})$.

`1.1.2.Fall` $q \notin x$.

`2:` Es gilt: $(q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` q Menge.

`3:` Aus `2.1.Fall` "q Menge"
folgt via **2-28**: $q \in \{q\} \cup y$.

`4:` Aus `3` und
aus `VS` gleich "$\{p\} \cup x = \{q\} \cup y \ldots$"
folgt: $q \in \{p\} \cup x$.

`5:` Aus `4` "$q \in \{p\} \cup x$"
folgt via **folk**: $(q = p) \vee (q \in x)$.

`6:` Aus `5` und
aus `1.1.2.Fall` "$q \notin x$"
folgt: $q = p$.

`7:` Nach `VS` gilt: $p \neq q$.

`2.2.Fall` q Unmenge.

`3:` Aus `2.2.Fall` "q Unmenge"
folgt via **folk**: $\{q\} = 0$.

`4:` $x \stackrel{\textbf{folk}}{=} 0 \cup x \stackrel{\textbf{folk}}{=} 0 \cup (x \setminus 0) \stackrel{3}{=} \{q\} \cup (x \setminus \{q\})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x = \{q\} \cup (x \setminus \{q\})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$x = \{q\} \cup (x \setminus \{q\})$"

...

<u>Beweis **342-2**</u> g) VS gleich $(\{p\} \cup x = \{q\} \cup y) \wedge (p \notin x) \wedge (q \notin y) \wedge (p \neq q)$.

...

1.2: Es gilt: $(p \in y) \vee (p \notin y)$.

Fallunterscheidung

1.2.1.Fall $p \in y$.

Aus 1.2.1.Fall "$p \in y$"
folgt via **5-19**: $y = \{p\} \cup (y \setminus \{p\})$.

1.2.2.Fall $p \notin y$.

2: Es gilt: (p Menge) $\vee$ (p Unmenge).

Fallunterscheidung

2.1.Fall p Menge.

3: Aus 2.1.Fall "p Menge"
folgt via **2-28**: $p \in \{p\} \cup x$.

4: Aus 3 und
aus VS gleich "$\{p\} \cup x = \{q\} \cup y \ldots$"
folgt: $p \in \{q\} \cup y$.

5: Aus 4 "$p \in \{q\} \cup y$"
folgt via **folk**: $(p = q) \vee (p \in y)$.

6: Aus 5 und
aus 1.2.2.Fall "$p \notin y$"
folgt: $p = q$.

7: Nach VS gilt: $p \neq q$.

2.2.Fall p Unmenge.

3: Aus 2.2.Fall "p Unmenge"
folgt via **folk**: $\{p\} = 0$.

4: $y \stackrel{\textbf{folk}}{=} 0 \cup y \stackrel{\textbf{folk}}{=} 0 \cup (y \setminus 0) \stackrel{3}{=} \{p\} \cup (y \setminus \{p\})$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$y = \{p\} \cup (y \setminus \{p\})$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

A2 | "$y = \{p\} \cup (y \setminus \{p\})$"

...

<u>Beweis **342-2**</u> `h)` `VS` gleich $\qquad (\{p\} \cup x = \{q\} \cup y) \wedge (p \notin x) \wedge (q \notin y) \wedge (p \neq q).$

...

`1.3:` Aus `VS` gleich "$(\{p\} \cup x = \{q\} \cup y) \wedge (p \notin x) \wedge (q \notin y) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\qquad x \setminus \{q\} = y \setminus \{p\}.$

`2:` Es gilt: $\qquad \exists \Omega : \Omega = x \setminus \{q\}.$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega = x \setminus \{q\}$" und
aus `2`
folgt: $\qquad \Omega = y \setminus \{p\}.$

`3.2:` Aus `A1` gleich "$x = \{q\} \cup (x \setminus \{q\})$" und
aus `2`"$\ldots \Omega = x \setminus \{q\}$"
folgt: $\qquad x = \{q\} \cup \Omega.$

`3.3:` Via **5-14** gilt: $\qquad p \notin y \setminus \{p\}.$

`3.4:` Via **5-14** gilt: $\qquad q \notin x \setminus \{q\}.$

`4.1:` Aus `A2` gleich "$y = \{p\} \cup (y \setminus \{p\})$" und
aus `3.1`
folgt: $\qquad y = \{p\} \cup \Omega.$

`4.2:` Aus `3.3` und
aus `3.1`
folgt: $\qquad p \notin \Omega.$

`4.3:` Aus `3.4` und
aus `2`"$\ldots \Omega = x \setminus \{q\}$"
folgt: $\qquad q \notin \Omega.$

`5:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `4.2`,
aus `4.3`,
aus `3.2`,
aus `4.1`,
aus `2`"$\ldots \Omega = x \setminus \{q\}$" und
aus `3.1`
folgt:

$$\exists \Omega : (p, q \notin \Omega) \wedge (x = \{q\} \cup \Omega) \wedge (y = \{p\} \cup \Omega)$$
$$\wedge (\Omega = x \setminus \{q\}) \wedge (\Omega = y \setminus \{p\}).$$

$\square$

342-3. Gelegentlich ist es interessant, $\mathsf{337.0}(f,\Box)$ - f Funktion, $\Box$ Algebra in A - als Funktion identifizieren zu können. Dies gelingt zumindest im hier untersuchten Fall.

<u>**342-3(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *f Funktion.*

$\rightarrow\!)$ *$\Box$ Algebra in A.*

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha,\beta,\gamma:(\alpha\neq\beta)\wedge((\alpha,\beta\notin\gamma)\wedge(\alpha,\beta,f(\{\alpha\}\cup\gamma),f(\{\beta\}\cup\gamma)\in A))$
$\Rightarrow(f(\{\beta\}\cup\gamma)\_\Box\_\alpha=f(\{\alpha\}\cup\gamma)\_\Box\_\beta)$.

Dann folgt "$\mathsf{337.0}(f,\Box)$ Funktion".

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

$$\mathsf{337.0}(x,y)=\{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta):(\lambda\notin\mu)\wedge(\exists\Omega:((\mu,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\lambda),\eta)\in y))\}$$

<u>Beweis **342-3**</u>

`1.1:` Via **337-2** gilt: $\mathsf{337.0}(f,\Box)$ Relation.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\delta,\epsilon),(\delta,\eta)\in\mathsf{337.0}(f,\Box)$.

`2.1:` Aus $\rightarrow\!)$"f Funktion",
aus $\rightarrow\!)$"$\Box$ Algebra in A" und
aus `Thema1.2`"$(\delta,\epsilon)\ldots\in\mathsf{337.0}(f,\Box)$"
folgt via **342-1**: $\exists\Omega,\Phi:(\Phi,f(\Omega)\in A)\wedge(\Omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(\Phi\notin\Omega)$
$\wedge(\delta=\{\Phi\}\cup\Omega)\wedge(\epsilon=f(\Omega)\_\Box\_\Phi)$.

`2.2:` Aus $\rightarrow\!)$"f Funktion",
aus $\rightarrow\!)$"$\Box$ Algebra in A" und
aus `Thema1.2`"$\ldots(\delta,\eta)\ldots\in\mathsf{337.0}(f,\Box)$"
folgt via **342-1**: $\exists\Gamma,\Psi:(\Psi,f(\Gamma)\in A)\wedge(\Gamma\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(\Psi\notin\Gamma)$
$\wedge(\delta=\{\Psi\}\cup\Gamma)\wedge(\eta=f(\Gamma)\_\Box\_\Psi)$.

`3:` Aus `2.1`"$\ldots\delta=\{\Phi\}\cup\Omega\ldots$" und
aus `2.2`"$\ldots\delta=\{\Psi\}\cup\Gamma\ldots$"
folgt: $\{\Phi\}\cup\Omega=\{\Psi\}\cup\Gamma$.

`4:` Es gilt: $(\Phi=\Psi)\vee(\Phi\neq\Psi)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

...

Beweis **342-3** . . .

`Thema1.2` $(\delta, \epsilon), (\delta, \eta) \in \mathsf{337.0}(f, \Box)$.

. . .

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\Phi = \Psi.$

`5.1:` Aus `4.1.Fall` "$\Phi = \Psi$"
folgt: $f(\Omega)\_\Box\_\Phi = f(\Omega)\_\Box\_\Psi.$

`5.2:` Aus `3` "$\{\Phi\} \cup \Omega = \{\Psi\} \cup \Gamma$" ,
aus `2.1` "$\ldots \Phi \notin \Omega$" ,
aus `2.2` "$\ldots \Psi \notin \Gamma \ldots$" und
aus `4.1.Fall` "$\Phi = \Psi$"
folgt via **342-2**: $\Omega = \Gamma.$

`6.1:` Aus `2.1` "$\ldots \epsilon = f(\Omega)\_\Box\_\Phi$" und
aus `5.1`
folgt: $\epsilon = f(\Omega)\_\Box\_\Psi.$

`6.2:` Aus `5.2`
folgt: $f(\Omega)\_\Box\_\Psi = f(\Gamma)\_\Box\_\Psi.$

`7:` Aus `6.1` und
aus `6.2`
folgt: $\epsilon = f(\Gamma)\_\Box\_\Psi.$

`8:` Aus `7` und
aus `2.2` "$\ldots \eta = f(\Gamma)\_\Box\_\Psi$"
folgt: $\epsilon = \eta.$

. . .

. . .

Beweis **342-3** . . .

`Thema1.2` $(\delta,\epsilon),(\delta,\eta)\in 337.0(f,\Box)$.

. . .

`Fallunterscheidung`

`4.2.Fall` $\Phi\neq\Psi$.

5: Aus 3"$\{\Phi\}\cup\Omega=\{\Psi\}\cup\Gamma$",
aus 2.1"$\ldots\Phi\notin\Omega\ldots$",
aus 2.2"$\ldots\Psi\notin\Gamma\ldots$" und
aus 4.2.Fall"$\Phi\neq\Psi$"
folgt via **342-2**:
$$\exists\Upsilon:(\Phi,\Psi\notin\Upsilon)\wedge(\Omega=\{\Psi\}\cup\Upsilon)\wedge(\Gamma=\{\Phi\}\cup\Upsilon).$$

6.1: Aus 2.1"$\ldots f(\Omega)\in A\ldots$" und
aus 5"$\ldots\Omega=\{\Psi\}\cup\Upsilon\ldots$"
folgt: $f(\{\Psi\}\cup\Upsilon)\in A$.

6.2: Aus 2.2"$\ldots f(\Gamma)\in A\ldots$" und
aus 5"$\ldots\Gamma=\{\Phi\}\cup\Upsilon$"
folgt: $f(\{\Phi\}\cup\Upsilon)\in A$.

7: Aus 4.2.Fall"$\Phi\neq\Psi$",
aus 5"$\ldots\Phi,\Psi\notin\Upsilon\ldots$",
aus 2.1"$\ldots\Phi\ldots\in A\ldots$",
aus 2.2"$\ldots\Psi\ldots\in A\ldots$",
aus 6.1"$f(\{\Psi\}\cup\Upsilon)\in A$",
aus 6.2"$f(\{\Phi\}\cup\Upsilon)\in A$" und
aus VS gleich
"$\forall\alpha,\beta,\gamma:(\alpha\neq\beta)\wedge((\alpha,\beta\notin\gamma)$
$\wedge(\alpha,\beta,f(\{\alpha\}\cup\gamma),f(\{\beta\}\cup\gamma)\in A))$
$\Rightarrow(f(\{\beta\}\cup\gamma)\_\Box\_\alpha=f(\{\alpha\}\cup\gamma)\_\Box\_\beta)$"
folgt: $f(\{\Psi\}\cup\Upsilon)\_\Box\_\Phi=f(\{\Phi\}\cup\Upsilon)\_\Box\_\Psi$.

8: Aus 7 und
aus 5"$\ldots(\Omega=\{\Psi\}\cup\Upsilon)\wedge(\Gamma=\{\Phi\}\cup\Upsilon)$"
folgt: $f(\Omega)\_\Box\_\Phi=f(\Gamma)\_\Box\_\Psi$.

9: Aus 8,
aus 2.1"$\ldots\epsilon=f(\Omega)\_\Box\_\Phi$" und
aus 2.2"$\ldots\eta=f(\Gamma)\_\Box\_\Psi$"
folgt: $\epsilon=\eta$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\epsilon=\eta$.

. . .

<u>Beweis **342-3**</u> ...

...

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A2} \; \text{“}\forall\delta,\epsilon,\eta : ((\delta,\epsilon),(\delta,\eta) \in \mathsf{337.0}(f,\Box)\,) \Rightarrow (\epsilon = \eta)\text{”}}$

`2`: Aus `1.1`“$\mathsf{337.0}(f,\Box)$ Relation” und
aus `A2` gleich “$\forall\delta,\epsilon,\eta : ((\delta,\epsilon),(\delta,\eta) \in \mathsf{337.0}(f,\Box)\,) \Rightarrow (\epsilon = \eta)$”
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{337.0}(f,\Box)$ Funktion.

$\Box$

342-4. Ist $\mathsf{337.0}(f,\Box)$, f Funktion, $\Box$ Algebra in A, eine Funktion, so kündigt sich die Gleichung $\mathsf{337.0}(f,\Box)\,(\{p\}\cup E) = \mathsf{337.0}(f,\Box)\,(E)\_\Box\_p$ an.

<u>**342-4(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ f *Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{337.0}(f,\Box)$ *Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $p, f(E) \in A$.

$\rightarrow\!)$ $p \notin E$.

Dann folgt "$\mathsf{337.0}(f,\Box)\,(\{p\}\cup E) = f(E)\_\Box\_p$".

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

$$\mathsf{337.0}(x,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda\notin\mu)\wedge(\exists\Omega : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\lambda),\eta)\in y))\}$$

<u>Beweis **342-4**</u>

1: Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion",
aus $\rightarrow\!)$ "$\Box$ Algebra in A",
aus $\rightarrow\!)$ "$p, f(E)\in A$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$p\notin E$"
folgt via **342-1**: $(\{p\}\cup E, f(E)\_\Box\_p) \in \mathsf{337.0}(f,\Box)$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "$\mathsf{337.0}(f,\Box)$ Funktion" und
aus 1 "$(\{p\}\cup E, f(E)\_\Box\_p) \in \mathsf{337.0}(f,\Box)$"
folgt via **18-20**: $f(E)\_\Box\_p = \mathsf{337.0}(f,\Box)\,(\{p\}\cup E)$.

3: Aus 2
folgt: $\mathsf{337.0}(f,\Box)\,(\{p\}\cup E) = f(E)\_\Box\_p$.

$\Box$

Analysis: $\mathtt{337.0}(x, y)$ und 0.
R ist **ana1** von q, x und 0.
$\mathtt{rf}1qx$ und 0.

Ersterstellung: 05/06/15 **Letzte Änderung: 09/06/15**

343-1. Vorab soll Einiges über $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,E)$ und $\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,E)$ bewiesen werden.

343-1(Satz)

a) *Aus* "$((p, q), x) \in E$"
folgt "$p \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,E)$" *und* "$q \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,E)$".

b) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,E)$" *folgt* "$\exists \Omega, \Phi : ((p, \Omega), \Phi) \in E$".

c) *Aus* "$q \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,E)$" *folgt* "$\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, q), \Phi) \in E$".

Beweis **343-1** a) VS gleich $((p, q), x) \in E$.

1: Aus VS gleich "$((p, q), x) \in E$"
folgt via **folk**: $(p, q) \in \mathsf{dom}\,E$.

2.1: Aus 1 "$(p, q) \in \mathsf{dom}\,E$"
folgt via **folk**: $\boxed{p \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,E)}$

2.2: Aus 1 "$(p, q) \in \mathsf{dom}\,E$"
folgt via **folk**: $\boxed{q \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,E)}$

<u>Beweis **343-1**</u> `b)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,E).$

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,E)$”
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (p, \Omega) \in \mathsf{dom}\,E.$

`2:` Aus `1`“$\ldots (p, \Omega) \in \mathsf{dom}\,E$”
folgt via **folk**: $\exists \Phi : ((p, \Omega), \Phi) \in E.$

`3:` Aus `1`“$\exists \Omega \ldots$” und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega, \Phi : ((p, \Omega), \Phi) \in E.$

`c)` `VS` gleich $q \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,E).$

`1:` Aus `VS` gleich “$q \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,E)$”
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega, q) \in \mathsf{dom}\,E.$

`2:` Aus `1`“$\ldots (\Omega, q) \in \mathsf{dom}\,E$”
folgt via **folk**: $\exists \Phi : ((\Omega, q), \Phi) \in E.$

`3:` Aus `1`“$\exists \Omega \ldots$” und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega, \Phi : ((\Omega, q), \Phi) \in E.$

□

343-2. $\mathsf{337.0}(x,y)$ und 0 sollen nun zusammen gebracht werden.

<u>343-2(Satz)</u>

a) $\mathsf{337.0}(0,y) = 0$.

b) $\mathsf{337.0}(x,0) = 0$.

c) "$0 \neq \mathsf{337.0}(\{(0,q)\},y)$" *genau dann, wenn* "$q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,y)$".

d) "$\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},y) = 0$" *genau dann, wenn* "$q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,y)$".

e) *Aus* "$\square$ *Algebra in* A" *und* "$0 \neq \mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\square)$" *folgt* "$q \in A$".

f) *Aus* "$\square$ *Algebra in* A" *und* "$\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\square) = 0$" *folgt* "$q \notin A$".

g) *Aus* "$\square$ *Algebra in* A" *und* "$q \in A$" *folgt* "$0 \neq \mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\square)$".

h) *Aus* "$\square$ *Algebra in* A" *und* "$q \notin A$" *folgt* "$\mathsf{337.0}(\{(0,q)\},\square) = 0$".

$\mathsf{337.0}(x,y)$
$= \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu,\Omega) \in x) \wedge (((\Omega,\lambda),\eta) \in y))\}$

<u>Beweis **343-2**</u> a)

`Thema0` $\alpha \in \mathsf{337.0}(0,y)$.

1: Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{337.0}(0,y)$"
folgt **p.def.**: $\exists \Psi, \Omega : (\Psi,\Omega) \in 0$.

2: Via **folk** gilt: $(\Psi,\Omega) \notin 0$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{337.0}(0,y)) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{337.0}(0,y))$.

Konsequenz via **folk**: $\mathsf{337.0}(0,y) = 0$.

<u>Beweis **343-2**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$	$\alpha \in \mathsf{337.0}(x, 0)$.
1: Aus `Thema1` “ $\alpha \in \mathsf{337.0}(0, y)$ ” folgt **p.def.**:	$\exists \Phi, \Omega, \Gamma : ((\Phi, \Omega), \Gamma) \in 0.$
2: Via **folk** gilt:	$((\Phi, \Omega), \Gamma) \notin 0.$

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{337.0}(x, 0)) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{337.0}(x, 0)).$

Konsequenz via **folk**: $\mathsf{337.0}(x, 0) = 0.$

`c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $0 \neq \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, y)$.

1: Aus `VS` gleich “ $0 \neq \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, y)$ ”
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, y)$.

2: Aus 1 “ $\ldots \Omega \in \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, y)$ ”
folgt via **339-9**: $\exists \Psi, \Phi : ((q, \Psi), \Phi) \in y.$

3: Aus 2 “ $\ldots ((q, \Psi), \Phi) \in y$ ”
folgt via **343-1**: $q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, y).$

`c)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, y).$

1: Aus `VS` gleich “ $q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, y)$ ”
folgt via **343-1**: $\exists \Omega, \Phi : ((q, \Omega), \Phi) \in y.$

2: Aus 1 “ $\ldots ((q, \Omega), \Phi) \in y$ ”
folgt via **339-9**: $(\{\Omega\}, \Phi) \in \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, y)$.

3: Aus 2 “ $(\{\Omega\}, \Phi) \in \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, y)$ ”
folgt via **folk**: $0 \neq \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, y)$.

`d)`

1: Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$(0 \neq \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, y)) \Leftrightarrow (q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, y)).$

2: Aus 1
folgt: $(\mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, y) = 0) \Leftrightarrow (q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, y)).$

<u>Beweis **343-2**</u> `e)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (0 \neq \mathsf{337.0}(\{(0,q)\}, \Box))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \mathsf{337.0}(\{(0,q)\}, \Box)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A\ldots$"
folgt via **340-1**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $q \in A$.

`f)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\mathsf{337.0}(\{(0,q)\}, \Box) = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{337.0}(\{(0,q)\}, \Box) = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A\ldots$"
folgt via **340-1**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $q \notin A$.

`g)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (q \in A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A\ldots$"
folgt via **340-1**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in A$" und
aus `1`
folgt: $q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$.

`3:` Aus `2`"$q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $0 \neq \mathsf{337.0}(\{(0,q)\}, \Box)$.

`h)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (q \notin A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A\ldots$"
folgt via **340-1**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \notin A$" und
aus `1`
folgt: $q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$.

`3:` Aus `2`"$q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{337.0}(\{(0,q)\}, \Box) = 0$.

$\Box$

343-3. Ist R **ana1** von q, x, so gilt $R^{-1}[E] \subseteq \mathbb{N}$.

343-3(Satz)

a) *Aus* "$x \subseteq p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *folgt* "$x \subseteq \mathbb{N}$".

b) *Aus* "R *ist* **ana1** *von* q, x" *folgt* "$R^{-1}[E] \subseteq \mathbb{N}$".

c) *Aus* "$p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *folgt* "$p \subseteq \mathbb{N}$".

Beweis **343-3** `a)` `VS` gleich $x \subseteq p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in x$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq p \ldots$"
folgt via **folk**: $\alpha \in p$.

`3:` Aus `2`"$\alpha \in p$" und
aus `VS` gleich "$p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $\alpha \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \subseteq \mathbb{N}$.

`b)` `VS` gleich R ist **ana1** von q, x.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Via **folk** gilt: $R^{-1}[E] \subseteq \mathsf{dom}\, R$.

`3:` Aus `2`"$R^{-1}[E] \subseteq \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $R^{-1}[E] \subseteq \mathbb{N}$.

`c)` `VS` gleich $p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1:` Via **folk** gilt: $p \subseteq p$.

`2:` Aus `1`"$p \subseteq p$" und
aus `VS` gleich "$p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \subseteq \mathbb{N}$.

$\square$

343-4. Nun soll **18-21** um eine Facette bereichert werden.

<u>**343-4(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ f *Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $f(p) = q$ *Menge.*

Dann folgt "$p \in f^{-1}[\{q\}]$.

<u>Beweis **343-4**</u>

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$f(p) = q$ Menge"
folgt via **folk**: $f(p) \in \{q\}$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion" und
aus 1 "$f(p) \in \{q\}$"
folgt via **18-29**: $p \in f^{-1}[\{q\}]$.

□

343-5. Ist R **ana1** von q, x und gilt $R(n) = 0$, so folgt $R(m) = 0$ für alle $m \in \mathsf{dom}\, R$ mit $n \leq m$.

343-5(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ R *ist* **ana1** *von* q, x.

$\rightarrow)$ $R(n) = 0$.

$\rightarrow)$ $n \leq m \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt "$R(m) = 0$".

$\leq$-**Notation**.

Beweis **343-5**

$\mathsf{337.0}(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$

`RECH`-**Notation**.

`1.1`: Aus $\rightarrow)$ "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-3(Def)**: R Funktion.

`1.2`: Aus $\rightarrow)$ "R ist **ana1** von q, x" und
aus $\rightarrow)$ "$\ldots m \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **340-4**: $m \in \mathbb{N}$.

`1.3`: Aus $\rightarrow)$ "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **343-3**: $R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{N}$.

`2.1`: Aus `1.1` "R Funktion",
aus $\rightarrow)$ "$R(n) = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt via **343-4**: $n \in R^{-1}[\{0\}]$.

`2.2`: Aus `1.2` "$m \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $m \in \mathbb{Z}$.

`2.3`: Aus `1.3` "$R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{N}$" und
aus **164-4** "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **folk**: $R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{Z}$.

...

<u>Beweis **343-5**</u> ...

`Thema3` $(\alpha \in R^{-1}[\{0\}]) \wedge (1+\alpha \leq m)$.

`4.1:` Aus `Thema3`“$\alpha \in R^{-1}[\{0\}] \ldots$”
folgt via **11-19**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`4.2:` Aus `Thema3`“$\alpha \in R^{-1}[\{0\}] \ldots$” und
aus `1.3`“$R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{N}$”
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathbb{N}$.

`4.3:` Aus `1.1`“R Funktion” und
aus `Thema3`“$\alpha \in R^{-1}[\{0\}] \ldots$”
folgt via **18-21**: $0 = R(\alpha)$.

`5:` Aus `4.2`“$\alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-10**: $1+\alpha \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus →)“R ist **ana1** von q, x”,
aus `Thema3`“$\ldots 1+\alpha \leq m$”,
aus →)“$\ldots m \in \mathsf{dom}\, R$” und
aus `5`“$1+\alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **340-4**: $1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`7:` Aus →)“R ist **ana1** von q, x”,
aus `4.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\, R$” und
aus `6`“$1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **337-3(Def)**: $R(1+\alpha) = \mathsf{337.0}(R(\alpha), x)$.

`8:` $$R(1+\alpha) \stackrel{7}{=} \mathsf{337.0}(R(\alpha), x) \stackrel{4.3}{=} \mathsf{337.0}(0, x) \stackrel{\mathbf{343-2}}{=} 0.$$

`9:` Aus `1.1`“R Funktion”,
aus `8`“$R(1+\alpha) = \ldots = 0$” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge”
folgt via **343-4**: $1+\alpha \in R^{-1}[\{0\}]$.

Ergo `Thema3`:

`A1` | “$\forall \alpha : ((\alpha \in R^{-1}[\{0\}]) \wedge (1+\alpha \leq m)) \Rightarrow (1+\alpha \in R^{-1}[\{0\}])$”

...

Beweis **343-5** . . .

`4`: Aus `2.1` "$n \in R^{-1}[\{0\}]$",
aus `2.3` "$R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{Z}$",
aus `2.2` "$m \in \mathbb{Z}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in R^{-1}[\{0\}]) \wedge (1+\alpha \leq m)) \Rightarrow (1+\alpha \in R^{-1}[\{0\}])$"
folgt via **337-11**: $\{n, \ldots, m\} \subseteq R^{-1}[\{0\}]$.

`5`: Aus →) "$n \leq m \ldots$" und
aus `2.2` "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **237-2**: $m \in \{n, \ldots, m\}$.

`6`: Aus `5` "$m \in \{n, \ldots, m\}$" und
aus `4` "$\{n, \ldots, m\} \subseteq R^{-1}[\{0\}]$"
folgt via **folk**: $m \in R^{-1}[\{0\}]$.

`7`: Aus `1.1` "R Funktion" und
aus `6` "$m \in R^{-1}[\{0\}]$"
folgt via **18-21**: $R(m) = 0$.

□

343-6. Aus $n \in \mathbb{N}$ folgt $n \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$.

343-6(Satz)

a) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$n \leq m \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$m \in \mathbb{N}$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$n \in \{n, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$".

c) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$n \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$".

d) *Aus* "$n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *folgt* "$p \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$".

e) *Aus* "R *ist* **ana1** *von* q, x" *und* "$n \in \mathsf{dom}\, R$" *folgt* "$(\mathsf{dom}\, R) \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$".

Beweis **343-6**

≤-Notation.

---

a) VS gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq m \in \mathbb{Z})$.

1: Aus VS gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$" folgt via **159-11**: $0 \leq n$.

2: Aus 1 "$0 \leq n$" und aus VS gleich "$\ldots n \leq m \ldots$" folgt via **folk**: $0 \leq m$.

3: Aus 2 "$0 \leq m$" und aus VS gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z}$" folgt via **164-6**: $m \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis **343-6**</u> `b)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`Thema1` $\alpha \in \{n, \ldots\}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{n, \ldots\}$"
folgt via **169-2**: $n \le \alpha \in \mathbb{Z}$.

`3:` Aus `2` "$n \le \alpha \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{n, \ldots\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\{n, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}}$

`2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $n \in \mathbb{Z}$.

`3:` Aus `2` "$n \in \mathbb{Z}$"

folgt via **237-2**: $\boxed{n \in \{n, \ldots\}}$

`c)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $n \subseteq \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{n, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.1` "$n \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `1.2` "$\{n, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $n \cup \{n, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$.

...

<u>Beweis **343-6**</u> `c)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

...

`Thema3` $\alpha \in \mathbb{N}$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `Thema3`"$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $\alpha \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4.2`"$\alpha \in \mathbb{S}$" und
aus `4.1`"$n \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $(\alpha < n) \vee (n \leq \alpha)$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $\alpha < n$.

`6:` Aus `Thema3`"$\alpha \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$" und
aus `5.1.Fall`"$\alpha < n$"
folgt via **197-5**: $\alpha \in n$.

`7:` Aus `6`"$\alpha \in n$"
folgt via **folk**: $\alpha \in n \cup \{n, \ldots\}$.

`5.2.Fall` $n \leq \alpha$.

`6:` Aus `5.2.Fall`"$n \leq \alpha$" und
aus `Thema3`"$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **236-1**: $\alpha \in \{n, \ldots\}$.

`7:` Aus `6`"$\alpha \in \{n, \ldots\}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in n \cup \{n, \ldots\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in n \cup \{n, \ldots\}$.

Ergo `Thema3`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha \in n \cup \{n, \ldots\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathbb{N} \subseteq n \cup \{n, \ldots\}$"

...

<u>Beweis **343-6**</u> `c)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

...

`4:` Aus `2`"$n \cup \{n, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `A1` gleich "$\mathbb{N} \subseteq n \cup \{n, \ldots\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**; $n \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$.

`d)` `VS` gleich $n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $n \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **338-8**: $n \subseteq p$.

`4:` Aus `3`"$n \subseteq p$"
folgt via **folk**: $n \cup \{n, \ldots\} \subseteq p \cup \{n, \ldots\}$.

`5:` Aus `2` und
aus `4`
folgt: $\mathbb{N} \subseteq p \cup \{n, \ldots\}$.

`6:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **343-3**: $p \subseteq \mathbb{N}$.

`7:` Aus `1`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{n, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$.

`8:` Aus `6`"$p \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `7`"$\{n, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $p \cup \{n, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$.

`9:` Aus `8`"$p \cup \{n, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `5`"$\mathbb{N} \subseteq p \cup \{n, \ldots\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $p \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$.

`e)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(\mathsf{dom}\, R) \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$.

□

343-7. Eine neue Klasse bereitet einen neuen Induktions-Beweis vor.

343-7(Definition)

$$\mathsf{343.0}(x,y) \;=\{\omega : x(1+\omega) = \mathsf{337.0}(x(\omega),y)\,\}.$$

RECH-**Notation**.

$\mathsf{337.0}(x,y)$
$= \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda\notin\mu)\wedge(\exists\Omega : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\lambda),\eta)\in y))\}.$

343-8. Induktions-Beweise erfordern immer aufs Neue den Einsatz von Hilfsresultaten.

343-8(Satz)

a) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$” *und* “$1+n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$” *folgt* “$n \in p$”.

b) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$” *und* “$1+(1+n) \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$” *folgt* “$n, 1+n \in p$”.

c) *Aus* “$n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$” *und* “$m \notin p$” *und* “$m \in \mathbb{N}$” *folgt* “$n < m$”.

d) *Aus* “R *ist* **ana1** *von* q, x” *und* “$n \in \mathbb{N}$” *und* “$1+n \in \mathsf{dom}\, R$” *folgt* “$n \in \mathsf{dom}\, R$”.

e) *Aus* “R *ist* **ana1** *von* q, x” *und* “$n \in \mathbb{N}$” *und* “$1+(1+n) \in \mathsf{dom}\, R$” *folgt* “$n, 1+n \in \mathsf{dom}\, R$”.

f) *Aus* “R *ist* **ana1** *von* q, x” *und* “$n \in \mathsf{dom}\, R$” *und* “$m \notin \mathsf{dom}\, R$” *und* “$m \in \mathbb{N}$” *folgt* “$n < m$”.

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **343-8** `a)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (1+n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **239-5**: $n \in 1+n$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots 1+n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **338-8**: $1+n \subseteq p$.

`3:` Aus `1`“$n \in 1+n$” und
aus `2`“$1+n \subseteq p$”
folgt via **folk**: $n \in p$.

Beweis **343-8** `b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + (1 + n) \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1`“$1 + n \in \mathbb{N}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots 1 + (1 + n) \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{1 + n \in p}$

`3:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N} \ldots$”,
aus `2`“$1 + n \in p$” und
aus `VS` gleich “$\ldots p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{n \in p}$

`c)` `VS` gleich $(n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (m \notin p) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots m \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: $m \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1`“$n \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`“$n \in \mathbb{S}$” und
aus `1.2`“$m \in \mathbb{S}$”
folgt via **folk**: $(n < m) \vee (m \leq n)$.

`wfFallunterscheidung`

`3.1.Fall` $m \leq n$.

`4:` Aus `VS` gleich “$\ldots m \in \mathbb{N}$”,
aus `3.1.Fall`“$m \leq n$” und
aus `VS` gleich “$n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **340-4**: $m \in p$.

`5:` Via `VS` gilt: $m \notin p$.

`Ende wfFallunterscheidung` : In beiden Fällen gilt: $n < m$.

<u>Beweis **343-8**</u> `d)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 1 + n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $n \in \mathsf{dom}\, R$.

`e)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + (1 + n) \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 1 + (1 + n) \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $n, 1 + n \in \mathsf{dom}\, R$.

`f)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \notin \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$",
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots (m \notin \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \in \mathbb{N})$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $n < m$.

□

343-9. Natürlich kann in **259-38** an Stelle von $f \cup x$ auch $x \cup f$ betrachtet werden.

343-9(Satz) *Es gelte:*

→) $f, x \cup f$ *Funktion.*

→) $p \in \mathsf{dom}\, f$.

Dann folgt "$(x \cup f)(p) = f(p)$".

Beweis **343-9**

1: Via ∪**KG** gilt: $x \cup f = f \cup x$.

2: Aus →) "$\ldots x \cup f$ Funktion" und
aus 1
folgt: $f \cup x$ Funktion.

3: Aus →) "$f \ldots$ Funktion",
aus 2 "$f \cup x$ Funktion" und
aus →) "$p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **259-28**: $(f \cup x)(p) = f(p)$.

4: Aus 3 und
aus 1
folgt: $(x \cup f)(p) = f(p)$.

□

343-10. Ist R **ana1** von q, x mit $\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$, so ist $\mathsf{dom}\, (\mathtt{rf}1qx) = \mathbb{N}$ und es gilt $\mathtt{rf}1qx = R$.

343-10(Satz)

a) *Aus "R ist* **ana1** *von q, x" folgt "$\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, (\mathtt{rf}1qx)$".*

b) *Aus "R ist* **ana1** *von q, x" und "$\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$"
folgt "$R = \mathtt{rf}1qx$" und "$\mathsf{dom}\, (\mathtt{rf}1qx) = \mathbb{N}$".*

<u>Beweis **343-10**</u> `a)` `VS` gleich R ist **ana1** von q, x.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-25**: $R \subseteq \mathtt{rf1}qx$.

`2:` Aus `1`"$R \subseteq \mathtt{rf1}qx$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`b)` `VS` gleich $(R$ ist **ana1** von $q, x) \wedge (\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$" und
aus `1`
folgt: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`3:` Via **337-25** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`4:` Aus `2`"$\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$" und
aus `3`"$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"

folgt via **308-6**: $\boxed{\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) = \mathbb{N}}$

`5.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-25**: $R \subseteq \mathtt{rf1}qx$.

`5.2:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ Funktion.

`5.3:` Aus `4` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$"
folgt: $\mathsf{dom}\, R = \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`6:` Aus `5.1`"$R \subseteq \mathtt{rf1}qx$",
aus `5.2`"$\mathtt{rf1}qx$ Funktion" und
aus `5.3`"$\mathsf{dom}\, R = \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$"

folgt via **308-6**: $\boxed{R = \mathtt{rf1}qx}$

□

343-11. Ist R **ana1** von q, x und gilt $R(n) = 0$, so hat dies Auswirkungen auf $\mathtt{rf1}qx$.

343-11(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) *R ist **ana1** von q, x.*

$\rightarrow$) $R(n) = 0$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \mathbb{N}$.

b) $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ *ist* **ana1** *von* q, x.

c) $\mathtt{rf1}qx = R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$.

d) $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) = \mathbb{N}$.

e) $\forall \alpha : (n \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf1}qx(\alpha) = 0)$.

$\leq$-**Notation**.

Beweis **343-11**

$\mathtt{RECH}$-**Notation**.

$$343.0(x, y) = \{\omega : x(1 + \omega) = 337.0(x(\omega), y)\}$$

$$337.0(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}.$$

---

a)

1: Aus $\rightarrow$) "$R(n) = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt: $R(n)$ Menge.

2: Aus 1 "$R(n)$ Menge"
folgt via **folk**: $n \in \mathsf{dom}\,R$.

3: Aus $\rightarrow$) "R ist **ana1** von q, x" und
aus 2 "$n \in \mathsf{dom}\,R$"
folgt via **343-6**: $(\mathsf{dom}\,R) \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$.

4: $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) \stackrel{\textbf{folk}}{=} (\mathsf{dom}\,R) \cup (\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})) \stackrel{\textbf{20-5}}{=} (\mathsf{dom}\,R) \cup \{n, \ldots\} \stackrel{3}{=} \mathbb{N}$.

<u>Beweis **343-11**</u> `b)`

`1.1:` Aus →) "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-3(Def)**: $(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`1.2:` Aus →) "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-4**: $0 \in \mathsf{dom}\, R$.

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$.

`3:` Aus `Thema2`"$\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$.

`4:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \{n, \ldots\}$.

`5:` Aus `3`"$\ldots \alpha \in \mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$" und
aus `4`
folgt: $\alpha \in \{n, \ldots\}$.

`6.1:` Aus `5`"$\alpha \in \{n, \ldots\}$"
folgt via **169-2**: $n \leq \alpha$.

`6.2:` Aus `5`"$\alpha \in \{n, \ldots\}$"
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha) = 0$.

`7:` Aus →) "R ist **ana1** von q, x",
aus →) "$R(n) = 0$",
aus `6.1`"$n \leq \alpha$" und
aus `3`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via **343-5**: $R(\alpha) = 0$.

`8:` Aus `7` und
aus `6.2`
folgt: $R(\alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha)$.

Ergo `Thema2`:

`A1`	"$\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))) \Rightarrow (R(\alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha))$"

`3:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion.

`4:` Aus `1.1`"R Funktion$\ldots$",
aus `3`"$\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})))$
$\Rightarrow (R(\alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha))$"
folgt via **18-41**: $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion.

...

Beweis **343-11** `b)` ...

`5:` Aus →) “ R ist **ana1** von q, x ”
folgt via **337-4**: $0 \in \mathsf{dom}\, R$.

`6:` Aus `1.1` “ R Funktion... ” ,
asu `4` “ $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}$ Funktion ” und
aus `5` “ $0 \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **259-38**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(0) = R(0)$.

`7:` Aus →) “ R ist **ana1** von q, x ”
folgt via **337-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`8:` Aus `6` und
aus `7`
folgt: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(0) = \{(0, q)\}$.

`9:` Aus →) “ $R(n) = 0$ ” und
aus 0$\mathcal{U}$**Axiom** “ 0 Menge”
folgt: $R(n)$ Menge.

`10:` Aus `9` “ $R(n)$ Menge ”
folgt via **folk**: $n \in \mathsf{dom}\, R$.

`11:` Aus →) “ R ist **ana1** von q, x ” und
aus `10` “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **340-4**: $n \in \mathbb{N}$.

`12:` Es gilt: $(1 \in \mathsf{dom}\, R) \vee (1 \notin \mathsf{dom}\, R)$.
`Fallunterscheidung`

...

Beweis **343-11** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

`12.1.Fall` $1 \in \mathsf{dom}\, R.$

`13:` Aus +**schola**"$1 + 0 = 1$" und
aus `12.1.Fall`
folgt: $1 + 0 \in \mathsf{dom}\, R.$

`14:` Aus →) "R ist **ana1** von q, x",
aus `5`"$0 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `13`"$1 + 0 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(1 + 0) = \mathsf{337.0}(R(0), x)\,.$

`15.1:` Aus `1.1`"R Funktion..." ,
aus `4`"$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion" und
aus `13`"$1 + 0 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **259-38**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + 0) = R(1 + 0).$

`15.2:` Aus `14` und
aus `6`
folgt: $R(1 + 0) = \mathsf{337.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0), x)\,.$

`16:` Aus `15.2` und
aus `15.1`
folgt: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + 0) = \mathsf{337.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0), x)\,.$

`17:` Aus `16` und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt **p.def.**: $0 \in \mathsf{343.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)\,.$

...

Beweis **343-11** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`12.2.Fall` $1 \notin \mathsf{dom}\, R.$

`13.1:` Aus `12.2.Fall`“$1 \notin \mathsf{dom}\, R$” und
aus **+schola**“$1+0=1$”
folgt: $1+0 \notin \mathsf{dom}\, R.$

`13.2:` Aus `12.2.Fall`“$1 \notin \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **261-3**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1).$

`14:` Aus `1.2`“$0 \in \mathsf{dom}\, R$”,
aus `1.1`“$\ldots \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$” und
aus `13.1`“$1+0 \notin \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **337-9**: $\mathsf{dom}\, R = 1+0.$

`15:` Aus `14` und
aus **schola**“$1+0=1$”
folgt: $\mathsf{dom}\, R = 1.$

`16:` Aus `10` und
aus `15`
folgt: $n \in 1.$

`17:` Aus `16` und
aus **95-1(Def)**“$1=\{0\}$”
folgt: $n \in \{0\}.$

`18:` Aus `17`
folgt via **folk**: $n=0.$

`19:` Aus `13.2` und
aus `18`
folgt: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1) = \mathsf{zo}_{\{0,\ldots\}}(1).$

`20:` Aus **≤schola**“$0 \le 1$” und
aus **∈schola**“$1 \in \mathbb{N}$”
folgt via **236-1**: $1 \in \{0,\ldots\}.$

`21:` Aus `20`“$1 \in \{0,\ldots\}$”
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{0,\ldots\}}(1) = 0.$

`22:` $$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+0) \stackrel{+\mathbf{schola}}{=} (R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1) \stackrel{19}{=} \mathsf{zo}_{\{0,\ldots\}}(1)$$
$$\stackrel{21}{=} 0 \stackrel{\mathbf{343-2}}{=} 337.0(0,x) \stackrel{\to)}{=} 337.0(R(n),x) \stackrel{18}{=} 337.0(R(0),x)$$
$$\stackrel{6}{=} 337.0((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0),x)\,.$$

...

...

Beweis **343-11** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`12.2.Fall` $1 \notin \mathsf{dom}\, R.$

...

23: Aus 22 "$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+0)$
$= \ldots = 337.0((R \cup \mathsf{zo}_{\{0,\ldots\}})(0), x)$ und
aus 0$\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt **p.def.**: $0 \in 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A2` | "$0 \in 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$"

`Thema12.3` $\alpha \in \mathbb{N} \cap 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$.

13: Aus `Thema12.3` "$\alpha \in \mathbb{N} \cap 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \in 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x))$.

14: Aus 13 "$\ldots \alpha \in 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$"
folgt **p.def.**:
$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha) = 337.0((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha), x)$.

15: Es gilt: $(1+(1+\alpha) \in \mathsf{dom}\, R) \vee (1+(1+\alpha) \notin \mathsf{dom}\, R)$.
`Fallunterscheidung`

...

...

Beweis **343-11** b) ...

`Thema12.3` $\alpha \in \mathbb{N} \cap 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$.

...

`Fallunterscheidung`

`15.1.Fall` $1 + (1 + \alpha) \in \mathsf{dom}\, R$.

16: Aus →) "R ist **ana1** von q, x",
aus 13 "$\alpha \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus 15.1.Fall "$1 + (1 + \alpha) \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **343-8**: $\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

17: Aus →) "R ist **ana1** von q, x",
aus 16 "$\ldots 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 15.1.Fall "$1 + (1 + \alpha) \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **337-3(Def)**:
$R(1 + (1 + \alpha)) = 337.0(R(1 + \alpha), x)$.

18.1: Aus 1.1 "R Funktion...",
aus 4 "$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion" und
aus 16 "$\ldots 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **259-38**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + \alpha) = R(1 + \alpha)$.

18.2: Aus 1.1 "R Funktion...",
aus 4 "$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion" und
aus 15.1.Fall "$1 + (1 + \alpha) \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **259-38**:
$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + (1 + \alpha)) = R(1 + (1 + \alpha))$.

19: Aus 17,
aus 18.1 und
aus 18.2
folgt:
$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + (1 + \alpha))$
$= 337.0((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + \alpha), x)$.

20: Aus 16 "$\ldots 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **ElementAxiom**: $1 + \alpha$ Menge.

21: Aus 19 "$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + (1 + \alpha))$
$= 337.0((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + \alpha), x)$" und
aus 20 "$1 + \alpha$ Menge"
folgt **p.def.**: $1 + \alpha \in 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$.

...

...

Beweis **343-11** `b)` ...

`Thema12.3` $\alpha \in \mathbb{N} \cap 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`15.2.Fall` $1 + (1 + \alpha) \notin \mathsf{dom}\, R$.

`16:` Aus `13`“$\alpha \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-10**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}$.

`17:` Aus `16`“$1 + \alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-10**: $1 + (1 + \alpha) \in \mathbb{N}$.

`18:` Aus →)“R ist **ana1** von q, x”,
aus `10`“$n \in \mathsf{dom}\, R$”,
aus `17`“$1 + (1 + \alpha) \in \mathbb{N}$” und
aus `15.2.Fall`“$1 + (1 + \alpha) \notin \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **343-8**: $n < 1 + (1 + \alpha)$.

`19.1:` Aus `18`“$n < 1 + (1 + \alpha)$”
folgt via **41-3**: $n \leq 1 + (1 + \alpha)$.

`19.2:` Aus `11`“$n \in \mathbb{N}$”,
aus `16`“$1 + \alpha \in \mathbb{N}$” und
aus `18`“$n < 1 + (1 + \alpha)$”
folgt via **162-6**: $n \leq 1 + \alpha$.

`19.3:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \{n, \ldots\}$.

`20.1:` Aus `19.1`“$n \leq 1 + (1 + \alpha)$” und
aus `17`“$1 + (1 + \alpha) \in \mathbb{N}$”
folgt via **236-1**: $1 + (1 + \alpha) \in \{n, \ldots\}$.

`20.2:` Aus `19.2`“$n \leq 1 + \alpha$” und
aus `16`“$1 + \alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **236-1**: $1 + \alpha \in \{n, \ldots\}$.

...

...

...

Beweis **343-11** `b)` ...

`Thema12.3` $\alpha \in \mathbb{N} \cap 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`15.2.Fall` $1 + (1 + \alpha) \notin \mathsf{dom}\, R$.

...

`21.1:` Aus `20.1`"$1 + (1 + \alpha) \in \{n, \ldots\}$"
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1 + (1 + \alpha)) = 0$.

`21.2:` Aus `20.2`"$1 + \alpha \in \{n, \ldots\}$"
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1 + \alpha) = 0$.

`21.3:` Aus `20.1`"$1 + (1 + \alpha) \in \{n, \ldots\}$" und
aus `19.3`
folgt: $1 + (1 + \alpha) \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$.

`21.4:` Aus `20.2`"$1 + \alpha \in \{n, \ldots\}$" und
aus `19.3`
folgt: $1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$.

`22.1:` Aus `3`"$\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion",
aus `4`"$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion" und
aus `21.3`"$1 + (1 + \alpha) \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$"
folgt via **343-9**:
$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + (1 + \alpha)) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1 + (1 + \alpha))$.

`22.2:` Aus `3`"$\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion",
aus `4`"$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion" und
aus `21.4`"$1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$"
folgt via **343-9**:
$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + \alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1 + \alpha)$.

`23:` $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + (1 + \alpha)) \overset{22.1}{=} \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1 + (1 + \alpha))$
$\overset{21.1}{=} 0 \overset{\mathbf{343-2}}{=} 337.0(0, x) \overset{21.2}{=} 337.0(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1 + \alpha), x)$
$\overset{22.2}{=} 337.0((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + \alpha), x)$.

`24:` Aus `16`"$1 + \alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1 + \alpha$ Menge.

...

...

...

<u>Beweis **343-11**</u> `b)` ...

`Thema12.3` $\alpha \in \mathbb{N} \cap 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, x)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`15.2.Fall` $1 + (1 + \alpha) \notin \mathsf{dom}\, R.$

...

`25:` Aus 23 "$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1 + (1 + \alpha))$
$= \dots = 337.0((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1 + \alpha), x)$ " und
aus 24 "$1 + \alpha$ Menge"
folgt **p.def.**: $1 + \alpha \in 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$1 + \alpha \in 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, x)$.

Ergo `Thema12.3`:

`A3` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, x)) \Rightarrow (1 + \alpha \in 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, x))$"

`13:` Aus `A2` gleich "$0 \in 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, x)$" und
aus `A3` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, x)) \Rightarrow (1 + \alpha \in 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, x))$"
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq 343.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, x)$.

`14:` Aus →) "R ist **ana1** von q, x" und
aus →) "$R(n) = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}) = \mathbb{N}.$

...

Beweis **343-11** `b)` ...

`Thema15` $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$.

`16:` Aus `Thema15` und
aus `14`
folgt: $\alpha, 1+\alpha \in \mathbb{N}$.

`17:` Aus `16`"$\alpha \ldots \in \mathbb{N}$" und
aus `13`"$\mathbb{N} \subseteq \mathsf{343.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{343.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$.

`18:` Aus `17`"$\alpha \in \mathsf{343.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$"
folgt **p.def.**:
$$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha) = \mathsf{337.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha), x).$$

Ergo `Thema15`:

`A4` "$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$
$\Rightarrow ((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha) = \mathsf{337.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha), x))$"

`16:` Via **folk** gilt: $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`17:` Aus `14`"$\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \mathbb{N}$" und
aus `16`
folgt: $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`18:` Aus `4`"$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion",
aus `17`"$\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus `8`"$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0) = \{(0, q)\}$" und
aus `A4` gleich "$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$
$\Rightarrow ((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha) = \mathsf{337.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha), x))$
folgt via **337-3(Def)**: $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ ist **ana1** von q, x.

<u>Beweis **343-11**</u> `cde)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \mathbb{N}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ ist **ana1** von q, x.

`2:` Aus `1.2`“$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ ist **ana1** von q, x” und
aus `1.1`“$\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \mathbb{N}$”
folgt via **343-10**: $(\mathtt{rf}1qx = R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) \wedge (\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx) = \mathbb{N})$.

`3.c):` Aus 2
folgt: $\mathtt{rf}1qx = R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$.

`3.d):` Aus 2
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx) = \mathbb{N}$.

...

Beweis **343-11** `cde)` ...

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $n \leq \alpha \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `Thema3.1`"$n \leq \alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **236-1**: $\alpha \in \{n, \ldots\}$.

`5.1:` Aus `4`"$\alpha \in \{n, \ldots\}$"
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha) = 0$.

`5.2:` Aus `1.2`"$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-3(Def)**: $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion.

`5.3:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \{n, \ldots\}$.

`5.4:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion.

`6:` Aus `4` und
aus `5.3`
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$.

`7:` Aus `5.4`"$\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion",
aus `5.2`"$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion" und
aus `6`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$"
folgt via **343-9**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha)$.

`8:` Aus `7` und
aus `5.1`
folgt: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha) = 0$.

`9:` Aus `8` und
aus `3.c)`
folgt: $\texttt{rf1}qx(\alpha) = 0$.

Ergo `Thema3.1`: | `A1.d)` | "$\forall \alpha : (n \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\texttt{rf1}qx(\alpha) = 0)$" |

□

343-12. Im Fall $R = \texttt{rf1}qx$ ergibt sich aus **343-11** Gefälliges.

343-12(Satz) *Es gelte:*

→) $\texttt{rf1}qx(n) = 0$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(\texttt{rf1}qx) = \mathbb{N}$.

b) $\forall \alpha : (n \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\texttt{rf1}qx(\alpha) = 0)$.

≤-Notation.

Beweis **343-12**

1: Via **337-25** gilt: $\texttt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x.

2.a): Aus 1 "$\texttt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x" und
aus →) "$\texttt{rf1}qx(n) = 0$"
folgt via **343-11**: $\mathsf{dom}\,(\texttt{rf1}qx) = \mathbb{N}$.

2.b): Aus 1 "$\texttt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x" und
aus →) "$\texttt{rf1}qx(n) = 0$"
folgt via **343-11**: $\forall \alpha : (n \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\texttt{rf1}qx(\alpha) = 0)$.

□

343-13. Ist R **ana1** von q, x, so kommt dem Verschwinden von $R(0)$ im Hinblick auf **343-11** interessante Bedeutung zu.

343-13(Satz)

a) *"$0 \neq \{(0, q)\}$" genau dann, wenn "q Menge".*

b) *"$\{(0, q)\} = 0$" genau dann, wenn "q Unmenge".*

c) *Aus "R ist* **ana1** *von q, x" und "q Menge" folgt "$0 \neq R(0)$".*

d) *Aus "R ist* **ana1** *von q, x" und "$0 \neq R(0)$" folgt "q Menge".*

e) *Aus "R ist* **ana1** *von q, x" und "q Unmenge" folgt "$R(0) = 0$".*

f) *Aus "R ist* **ana1** *von q, x" und "$R(0) = 0$" folgt "q Unmenge".*

g) $\mathbb{N} = \{0, \ldots\}$.

h) *"$\mathtt{rf1}qx = \mathtt{zo}_{\mathbb{N}}$" genau dann, wenn "$q$ Unmenge".*

i) *"$\mathtt{rf1}qx \neq \mathtt{zo}_{\mathbb{N}}$" genau dann, wenn "$q$ Menge".*

Beweis **343-13**

≤-Notation.

a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $0 \neq \{(0, q)\}$.

Aus VS gleich "$0 \neq \{(0, q)\}$"
folgt via **259-36**: q Menge.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich q Menge.

Aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge" und
aus VS gleich "q Menge"
folgt via **259-36**: $0 \neq \{(0, q)\}$.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $(0 \neq \{(0, q)\}) \Leftrightarrow (q \text{ Menge})$.

2: Aus 1
folgt: $(\{(0, q)\} = 0) \Leftrightarrow (q \text{ Unmenge})$.

Beweis **343-13** `c)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x\dots$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\dots q$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \neq \{(0, q)\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $0 \neq R(0)$.

`d)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (0 \neq R(0))$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x\dots$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\dots 0 \neq R(0)$"
folgt: $0 \neq \{(0, q)\}$.

`3:` Aus 2"$0 \neq \{(0, q)\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: q Menge.

`e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:
$((R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (0 \neq R(0))) \Rightarrow (q \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (\neg(q \text{ Menge}))) \Rightarrow (\neg(0 \neq R(0)))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (q \text{ Unmenge})) \Rightarrow (R(0) = 0)$.

`f)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$((R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (q \text{ Menge})) \Rightarrow (0 \neq R(0))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (\neg(0 \neq R(0)))) \Rightarrow (\neg(q \text{ Menge}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (R(0) = 0)) \Rightarrow (q \text{ Unmenge})$.

<u>Beweis **343-13**</u> g)

`Thema0.1` $\alpha \in \mathbb{N}$.

1: Aus `Thema0.1`“$\alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: $0 \leq \alpha$.

2: Aus `1`“$0 \leq \alpha$” und
aus `Thema0.1`“$\alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **236-1**: $\alpha \in \{0, \ldots\}$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha \in \{0, \ldots\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathbb{N} \subseteq \{0, \ldots\}$”

`Thema0.2` $\alpha \in \{0, \ldots\}$.

1: Aus `Thema0.2`“$\alpha \in \{0, \ldots\}$”
folgt via **169-2**: $0 \leq \alpha \in \mathbb{Z}$.

2: Aus `1`“$0 \leq \alpha \in \mathbb{Z}$”
folgt via **164-4**: $\alpha \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{0, \ldots\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\{0, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$”

1: Aus `A1` gleich “$\mathbb{N} \subseteq \{0, \ldots\}$” und
aus `A2` gleich “$\{0, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathbb{N} = \{0, \ldots\}$.

Beweis **343-13** `h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathtt{rf}1qx = \mathsf{zo}_{\mathbb{N}}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathtt{rf}1qx = \mathsf{zo}_{\mathbb{N}}$"
folgt: $\mathtt{rf}1qx(0) = \mathsf{zo}_{\mathbb{N}}(0)$.

`2.1:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf}1qx(0) = \{(0, q)\}$.

`2.2:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$"
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\mathbb{N}}(0) = 0$.

`3:` Aus `1`,
aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\{(0, q)\} = 0$.

`4:` Aus `3`"$\{(0, q)\} = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: q Unmenge.

`h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich q Unmenge.

`1:` Via **337-7** gilt: $\{(0, \{(0, q)\})\}$ ist **ana1** von q, x.

`2:` Aus `1`"$\{(0, \{(0, q)\})\}$ ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-3(Def)**: $\{(0, \{(0, q)\})\}(0) = \{(0, q)\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "q Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{(0, q)\} = 0$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\{(0, \{(0, q)\})\}(0) = 0$.

`5:` Aus `1`"$\{(0, \{(0, q)\})\}$ ist **ana1** von q, x" und
aus `4`"$\{(0, \{(0, q)\})\}(0) = 0$"
folgt via **343-11**:

$$(\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx) = \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (0 \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf}1qx(\alpha) = 0)).$$

...

<u>Beweis **343-13**</u> `h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich q Unmenge.

...

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $\beta \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`7:` Aus `Thema6` und
aus `5`"$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) = \mathbb{N}\ldots$"
folgt: $\beta \in \mathbb{N}$.

`8:` Aus `7`"$\beta \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $0 \le \beta$.

`9:` aus `8`"$0 \le \beta$",
aus `7`"$\beta \in \mathbb{N}$" und
aus `5`"$\ldots\forall\alpha : (0 \le \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf1}qx(\alpha) = 0)$"
folgt: $\mathtt{rf1}qx(\beta) = 0$.

`10:` Aus `7`"$\beta \in \mathbb{N}$"
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\mathbb{N}}(\beta) = 0$.

`11:` Aus `9` und
aus `10`
folgt: $\mathtt{rf1}qx(\beta) = \mathsf{zo}_{\mathbb{N}}(\beta)$.

Ergo `Thema6`: `A1` | "$\forall\beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \Rightarrow (\mathtt{rf1}qx(\beta) = \mathsf{zo}_{\mathbb{N}}(\beta))$"

`7.1:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ Funktion.

`7.2:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{zo}_{\mathbb{N}}$ Funktion.

`7.3:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\mathbb{N}}) = \mathbb{N}$.

`8:` Aus `5`"$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) = \mathbb{N}\ldots$" und
aus `7.3`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) = \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\mathbb{N}})$.

`9:` Aus `7.1`"$\mathtt{rf1}qx$ Funktion",
aus `7.2`"$\mathsf{zo}_{\mathbb{N}}$ Funktion",
aus `A1` gleich "$\forall\beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \Rightarrow (\mathtt{rf1}qx(\beta) = \mathsf{zo}_{\mathbb{N}}(\beta))$" und
aus `8`"$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) = \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\mathbb{N}})$"
folgt via **ISF**: $\mathtt{rf1}qx = \mathsf{zo}_{\mathbb{N}}$.

Beweis **343-13** `i)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt: $(\mathtt{rf}1qx = \mathtt{zo}_{\mathbb{N}}) \Leftrightarrow (q \text{ Unmenge}).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(\mathtt{rf}1qx \neq \mathtt{zo}_{\mathbb{N}}) \Leftrightarrow (q \text{ Menge}).$

$\square$

343-14. Ist R **ana1** von q, x, so ist die Diskussion von $R(1) = 0$ oder nicht gelegentlich von Interesse. Bemerkenswerter Weise spielt es in `c)` keine Rolle, ob $1 \in \mathsf{dom}\, R$ oder nicht.

343-14(Satz)

`a)` *Aus "R ist* **ana1** *von q, x" und "$R(1) = 0$" folgt "$q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)$".*

`b)` *Aus "R ist* **ana1** *von q, x" und "$1 \in \mathsf{dom}\, R$" und "$q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)$" folgt "$R(1) = 0$".*

`c)` *Aus "R ist* **ana1** *von q, x" und "$q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)$" folgt "$0 \neq R(1)$".*

`d)` *Aus "R ist* **ana1** *von q, x" und "$1 \in \mathsf{dom}\, R$" und "$0 \neq R(1)$" folgt "$q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)$".*

`e)` *Aus "$\mathtt{rf1}qx(1) = 0$" folgt "$q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)$".*

`f)` *Aus "$1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$" und "$q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)$" folgt "$\mathtt{rf1}qx(1) = 0$".*

`g)` *Aus "$q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)$" folgt "$0 \neq \mathtt{rf1}qx(1)$".*

`h)` *Aus "$1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$" und "$0 \neq \mathtt{rf1}qx(1)$" folgt "$q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)$".*

Beweis **343-14**

$\mathsf{337.0}(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}.$

<u>Beweis **343-14**</u> `a)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (R(1) = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots R(1) = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt: $R(1)$ Menge.

`2:` Aus `1`"$R(1)$ Menge"
folgt via **folk**: $1 \in \mathsf{dom}\, R$.

`3:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$" und
aus `2`"$1 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **339-10**: $R(1) = \mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x)$.

`4:` Aus `3` und
aus `VS` gleich "$\ldots R(1) = 0$"
folgt: $\mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x) = 0$.

`5:` Aus `4`"$\mathsf{337.0}(\{(0, q)\}, x) = 0$"
folgt via **343-2**: $q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)$.

<u>Beweis **343-14**</u> `b)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R) \ldots$"
folgt via **339-10**: $R(1) = 337.0(\{(0, q)\}, x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)$"
folgt via **343-2**: $337.0(\{(0, q)\}, x) = 0$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $R(1) = 0$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$((R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (R(1) = 0)) \Rightarrow (q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x))$

`2:` Aus `1`
folgt: $((R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (\neg(q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)))) \Rightarrow (\neg(R(1) = 0))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x))) \Rightarrow (0 \neq R(1))$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$((R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x))) \Rightarrow (R(1) = 0)$

`2:` Aus `1`
folgt: $((R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (\neg(R(1) = 0)))$
$\Rightarrow (\neg(q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (0 \neq R(1)))$
$\Rightarrow (q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x))$.

`e)` `VS` gleich $\mathtt{rf1}qx(1) = 0$.

`1:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x.

`2:` Aus `1` "$\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x" und
aus `VS` gleich "$\mathtt{rf1}qx(1) = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, x)$.

<u>Beweis **343-14**</u> `f)` `VS` gleich $(1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge (q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,x))$.

`1:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x.

`2:` Aus `1`“$\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x” und
aus `VS` gleich “$(1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge (q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,x))$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathtt{rf1}qx(1) = 0$.

`g)` `VS` gleich $q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,x)$.

`1:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x.

`2:` Aus `1`“$\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x” und
aus `VS` gleich “$q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,x)$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $0 \neq \mathtt{rf1}qx(1)$.

`h)` `VS` gleich $(1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge (0 \neq \mathtt{rf1}qx(1))$.

`1:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x.

`2:` Aus `1`“$\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von q, x” und
aus `VS` gleich “$(1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge (0 \neq \mathtt{rf1}qx(1))$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,x)$.

$\square$

343-15. Aussagen `abcd)` von **343-14** sind für Algebren $\Box$ in A ansprechend re-formulierbar.

343-15(Satz)

Aus "$\Box$ Algebra in A"
und "R ist **ana1** *von* $q, \Box$"...

a) ...*und* "$R(1) = 0$" *folgt* "$q \notin A$".

b) ...*und* "$1 \in \mathsf{dom}\, R$" *und* "$q \notin A$" *folgt* "$R(1) = 0$".

c) ...*und* "$q \in A$" *folgt* "$0 \neq R(1)$".

d) ...*und* "$1 \in \mathsf{dom}\, R$" *und* "$0 \neq R(1)$" *folgt* "$q \in A$".

Beweis **343-15** `a)`
`VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \Box) \wedge (R(1) = 0)$.

1: Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in A..."
folgt via **340-1**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A$.

2: Aus `VS` gleich "...$(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \Box) \wedge (R(1) = 0)$"
folgt via **343-14**: $q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$.

3: Aus 2 und
aus 1
folgt: $q \notin A$.

`b)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \Box) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (q \notin A)$.

1: Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in A..."
folgt via **340-1**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A$.

2: Aus `VS` gleich "...$q \notin A$" und
aus 1
folgt: $q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$.

3: Aus `VS` gleich "...$(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \Box) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R)$..." und
aus 2"$q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$"
folgt via **343-14**: $R(1) = 0$.

<u>Beweis **343-15**</u> `c)` `VS` gleich ($\Box$ Algebra in A) $\wedge$ (R ist **ana1** von $q, \Box$) $\wedge$ ($q \in A$).

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **340-1**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in A$" und
aus `1`
folgt: $q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots R$ ist **ana1** von $q, \Box \ldots$" und
aus `2`"$q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$"
folgt via **343-14**: $0 \neq R(1)$.

`d)`
`VS` gleich ($\Box$ Algebra in A) $\wedge$ (R ist **ana1** von $q, \Box$) $\wedge$ ($1 \in \mathsf{dom}\,R$) $\wedge$ ($0 \neq R(1)$).

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **340-1**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots$ (R ist **ana1** von $q, \Box$) $\wedge$ ($1 \in \mathsf{dom}\,R$) $\wedge$ ($0 \neq R(1)$)"
folgt via **343-14**: $q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$.

`3:` Aus `2` und
aus `1`
folgt: $q \in A$.

$\Box$

343-16. Auch die Re-formulierung von **343-14**`efgh)` für Algebren $\Box$ in A liefert Ansehliches.

343-16(Satz)

Aus "$\Box$ Algebra in A" und …

a) *… und "$\mathtt{rf1}q\Box(1) = 0$" folgt "$q \notin A$".*

b) *… und "$1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$" und "$q \notin A$" folgt "$\mathtt{rf1}q\Box(1) = 0$".*

c) *… und "$q \in A$" folgt "$0 \neq \mathtt{rf1}q\Box(1)$".*

d) *… und "$1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$" und "$0 \neq \mathtt{rf1}q\Box(1)$" folgt "$q \in A$".*

Beweis **343-16** `a)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\mathtt{rf1}q\Box(1) = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in A…"
folgt via **340-1**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A$.

`2:` Aus `VS` gleich "…$\mathtt{rf1}q\Box(1) = 0$"
folgt via **343-14**: $q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$.

`3:` Aus `2` und
aus `1`
folgt: $q \notin A$.

`b)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \wedge (q \notin A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in A…"
folgt via **340-1**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A$.

`2:` Aus `VS` gleich "…$q \notin A$" und
aus `1`
folgt: $q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$.

`3:` Aus `VS` gleich "…$1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$…" und
aus `2`"$q \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$"
folgt via **343-14**: $\mathtt{rf1}q\Box(1) = 0$.

Beweis **343-16** `c)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (q \in A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **340-1**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in A$" und
aus `1`
folgt: $q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$.

`3:` Aus `2`"$q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$"
folgt via **343-14**: $0 \neq \mathtt{rf1}q\Box(1)$.

`d)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \wedge (0 \neq \mathtt{rf1}q\Box(1))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **340-1**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box) = A$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \wedge (0 \neq \mathtt{rf1}q\Box(1))$"
folgt via **343-14**: $q \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\,\Box)$.

`3:` Aus `2` und
aus `1`
folgt: $q \in A$.

$\Box$

Analysis: $\Box$ tunnelt rechts/links auf Q.
Hinreichendes für $\mathtt{rf1}q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$, $\Box$ Algebra in A.

Ersterstellung: 11/06/15 **Letzte Änderung: 19/01/16**

344-1. Der bereits in **340-10** erscheinenden - und einer weiteren - Bedingung an die Rechenregeln einer Algebra soll hier ein eigener Name gegeben werden.

344-1(Definition)

1) "$\Box$ **tunnelt rechts auf** Q" genau dann, wenn
$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow ((\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\beta){}_{-}\Box{}_{-}\gamma = (\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\gamma){}_{-}\Box{}_{-}\beta)$" .

2) "$\Box$ **tunnelt links auf** Q" genau dann, wenn
$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_{-}\Box{}_{-}(\beta{}_{-}\Box{}_{-}\gamma) = \beta{}_{-}\Box{}_{-}(\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\gamma))$" .

`ALG`-**Notation**.

344-2. Aus einer scheinbar schwächeren Voraussetzung folgt erstaunlich Allgemeines, das in der Nähe von "rechts tunneln" angesiedelt ist. hinreichend.

344-2(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in Q) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((q\_\Box\_\alpha)\_\Box\_\beta = (q\_\Box\_\beta)\_\Box\_\alpha)$.

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q$.

Dann folgt "$(q\_\Box\_a)\_\Box\_b = (q\_\Box\_b)\_\Box\_a$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **344-2**

1: Es gilt: $((a,b \in Q) \wedge (a \neq b)) \vee (a \notin Q) \vee (b \notin Q) \vee (a = b)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(a,b \in Q) \wedge (a \neq b)$.

Aus `1.1.Fall` "$(a,b \in Q) \wedge (a \neq b)$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in Q) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((q\_\Box\_\alpha)\_\Box\_\beta = (q\_\Box\_\beta)\_\Box\_\alpha)$"
folgt: $(q\_\Box\_a)\_\Box\_b = (q\_\Box\_b)\_\Box\_a$.

...

Beweis **344-2** . . .

. . .

`Fallunterscheidung`

. . .

`1.2.Fall` $a \notin Q$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$a \notin Q$"
folgt via **92-1**: $(q, a) \notin Q \times Q$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "$a \notin Q$"
folgt via **92-1**: $(q\_\square\_b, a) \notin Q \times Q$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus →) "$\mathsf{dom}\,\square = Q \times Q$"
folgt: $(q, a) \notin \mathsf{dom}\,\square$.

`3.2:` Aus `2.2` und
aus →) "$\mathsf{dom}\,\square = Q \times Q$"
folgt: $(q\_\square\_b, a) \notin \mathsf{dom}\,\square$.

`4.1:` Aus `3.1` "$(q, a) \notin \mathsf{dom}\,\square$"
folgt via **93-3**: $q\_\square\_a = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2` "$(q\_\square\_b, a) \notin \mathsf{dom}\,\square$"
folgt via **93-3**: $(q\_\square\_b)\_\square\_a = \mathcal{U}$.

`5:` $(q\_\square\_a)\_\square\_b \stackrel{4.1}{=} \mathcal{U}\_\square\_b \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{4.2}{=} (q\_\square\_b)\_\square\_a$.

. . .

Beweis **344-2** ...

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $b \notin Q$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall`“$b \notin Q$”
folgt via **92-1**: $(q\_\square\_a, b) \notin Q \times Q$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall`“$b \notin Q$”
folgt via **92-1**: $(q, b) \notin Q \times Q$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus →) “$\mathsf{dom}\,\square = Q \times Q$”
folgt: $(q\_\square\_a, b) \notin \mathsf{dom}\,\square$.

`3.2:` Aus `2.2` und
aus →) “$\mathsf{dom}\,\square = Q \times Q$”
folgt: $(q, b) \notin \mathsf{dom}\,\square$.

`4.1:` Aus `3.1`“$(q\_\square\_a, b) \notin \mathsf{dom}\,\square$”
folgt via **93-3**: $(q\_\square\_a)\_\square\_b = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2`“$(q, b) \notin \mathsf{dom}\,\square$”
folgt via **93-3**: $q\_\square\_b = \mathcal{U}$.

`5:` $(q\_\square\_a)\_\square\_b \stackrel{4.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U}\_\square\_a \stackrel{4.2}{=} (q\_\square\_b)\_\square\_a$.

`1.4.Fall` $a = b$.

$(q\_\square\_a)\_\square\_b \stackrel{\mathsf{1.4.Fall}}{=} (q\_\square\_b)\_\square\_b \stackrel{\mathsf{1.4.Fall}}{=} (q\_\square\_b)\_\square\_a$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$(q\_\square\_a)\_\square\_b = (q\_\square\_b)\_\square\_a.$$

□

344-3. Da die Arbeit an der Formelsammlung nicht abgeschlossen ist - es entsteht hier ein Werk, das sich von der Größe her mit einer Suite vergleichen kann - bin ich mir nie sicher, ob Zwischenresultate der Mengenlehre nicht doch bereits irgendwo bewiesen sind. Dessen ungeachtet wird durch Vorliegendes Einiges abgekürzt.

344-3(Satz)

a) *Aus "$x(p) \in E$" folgt "p Menge" und "$p \in \mathsf{dom}\, x$".*

b) *Aus "$x(p) = q$ Menge" folgt "p Menge" und "$p \in \mathsf{dom}\, x$".*

c) *Aus "$x(p) = 0$" folgt "p Menge" und "$p \in \mathsf{dom}\, x$".*

Beweis **344-3** a) VS gleich $x(p) \in E$.

1: Aus VS gleich "$x(p) \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: $x(p)$ Menge.

2: Aus 1"$x(p)$ Menge"
folgt via **folk**: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

b) VS gleich $x(p) = q$ Menge.

1: Aus VS folgt: $x(p)$ Menge.

2: Aus 1"$x(p)$ Menge"
folgt via **folk**: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

c) VS gleich $x(p) = 0$.
Aus VS gleich "$x(p) = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt via des bereits bewiesenen b): $(p \text{ Menge}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

□

344-4. In **342-3** wird für Funktionen f und Algebren $\Box$ in A eine Rechenregel postuliert, die $\mathsf{337.0}(f, \Box)$ Funktion impliziert. Nun soll im Hinblick auf **ana1** von $q, \Box$ der Frage nach gegangen werden, wann $\mathsf{337.0}(\mathsf{337.0}(f, \Box), f)$ eine Funktion ist. Dabei soll vorausgesetzt werden, dass $\mathsf{337.0}(f, \Box)$ eine Funktion ist. Die etwas voluminöse Forderung an $\mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(f, \Box))$ und $\mathsf{dom}\, f$ verliert an Wucht, wenn an $\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$ mit $n \in \mathbb{N}$ als Definitions-Bereich von $\mathsf{337.0}(f, \Box)$ und - durch Versetzung $n \mapsto -1 + n$ - von f gedacht wird.

344-4(Satz) *Es gelte:*

→) f *Funktion.*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf* A.

→) $\mathsf{337.0}(f, \Box)$ *Funktion.*

→) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \text{ Menge}) \wedge (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(f, \Box))))$
$\Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\, f)$.

→) $\mathsf{ran}\, f \subseteq A$.

Dann folgt "$\mathsf{337.0}(\mathsf{337.0}(f, \Box), \Box)$ *Funktion*".

$\mathsf{337.0}(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$

Beweis **344-4**

ALG-**Notation**.

...

Beweis **344-4** ...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\delta \neq \epsilon) \wedge (\delta, \epsilon \notin \phi)$
$\wedge(\delta, \epsilon, \mathsf{337.0}(f, \square)\,(\{\delta\} \cup \phi), \mathsf{337.0}(f, \square)\,(\{\epsilon\} \cup \phi) \in A)$.

`2.1`: Aus `VS` gleich "$\ldots \delta \ldots \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: δ Menge.

`2,2`: Aus `Thema1`"$\ldots \mathsf{337.0}(f, \square)\,(\{\delta\} \cup \phi) \ldots \in A$"
folgt via **344-3**: $\{\delta\} \cup \phi \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(f, \square)\,)$.

`3`: Aus `Thema1`"$\ldots \delta \ldots \notin \phi \ldots$",
aus `2.1`"δ Menge",
aus `2.2`"$\{\delta\} \cup \phi \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(f, \square)\,)$" und
aus →)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \text{ Menge})$
$\wedge(\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(f, \square)\,)))$
$\Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\, f)$"
folgt: $\phi \in \mathsf{dom}\, f$.

`4`: Aus →) "f Funktion" und
aus `3`"$\phi \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $f(\phi) \in \mathsf{ran}\, f$.

`5`: Aus `4`"$f(\phi) \in \mathsf{ran}\, f$" und
aus →) "$\mathsf{ran}\, f \subseteq A$"
folgt via **folk**: $f(\phi) \in A$.

`6`: Aus `Thema1`"$\ldots \delta, \epsilon \ldots \in A$",
aus `5`"$f(\phi) \in A$" und
aus →) "$\square$ tunnelt rechts auf A"
folgt via **344-1(Def)**:
folgt: $(f(\phi)\_\square\_\epsilon)\_\square\_\delta = (f(\phi)\_\square\_\delta)\_\square\_\epsilon$.

...

...

Beweis **344-4** ...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\delta \neq \epsilon) \wedge (\delta, \epsilon \notin \phi)$
$\wedge(\delta, \epsilon, 337.0(f, \square)(\{\delta\} \cup \phi), 337.0(f, \square)(\{\epsilon\} \cup \phi) \in A).$

...

`7.1`: Aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ $337.0(f, \square)$ Funktion ” ,
aus `Thema1` “ $\ldots \delta \ldots \in A \ldots$ ” ,
aus `5` “ $f(\phi) \in A$ ” und
aus `Thema1` “ $\ldots \delta \ldots \notin \phi \ldots$ ”
folgt via **342-4**: $337.0(f, \square)(\{\delta\} \cup \phi) = f(\phi)\_\square\_\delta.$

`7.2`: Aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ $337.0(f, \square)$ Funktion ” ,
aus `Thema1` “ $\ldots \epsilon \in A \ldots$ ” ,
aus `5` “ $f(\phi) \in A$ ” und
aus `Thema1` “ $\ldots \epsilon \notin \phi \ldots$ ”
folgt via **342-4**: $337.0(f, \square)(\{\epsilon\} \cup \phi) = f(\phi)\_\square\_\epsilon.$

`8`: $337.0(f, \square)(\{\epsilon\} \cup \phi)\_\square\_\delta \stackrel{7.2}{=} (f(\phi)\_\square\_\epsilon)\_\square\_\delta$
$\stackrel{6}{=} (f(\phi)\_\square\_\delta)\_\square\_\epsilon \stackrel{7.1}{=} 337.0(f, \square)(\{\delta\} \cup \phi)\_\square\_\epsilon.$

Ergo `Thema1`:

`A1` | “ $\forall \delta, \epsilon, \phi : ((\delta \neq \epsilon) \wedge (\delta, \epsilon \notin \phi)$
$\wedge(\delta, \epsilon, 337.0(f, \square)(\{\delta\} \cup \phi), 337.0(f, \square)(\{\epsilon\} \cup \phi) \in A))$
$\Rightarrow (337.0(f, \square)(\{\epsilon\} \cup \phi)\_\square\_\delta = 337.0(f, \square)(\{\delta\} \cup \phi))\_\square\_\epsilon$ ”

`2`: Aus →) “ $337.0(f, \square)$ Funktion ” ,
aus →) “ $\square$ Algebra in A ” und
aus `A1` gleich “ $\forall \delta, \epsilon, \phi : ((\delta \neq \epsilon) \wedge (\delta, \epsilon \notin \phi)$
$\wedge(\delta, \epsilon, 337.0(f, \square)(\{\delta\} \cup \phi), 337.0(f, \square)(\{\epsilon\} \cup \phi) \in A))$
$\Rightarrow (337.0(f, \square)(\{\epsilon\} \cup \phi)\_\square\_\delta = 337.0(f, \square)(\{\delta\} \cup \phi)\_\square\_\epsilon)$ ”
folgt via **342-3**: $337.0(337.0(f, \square), \square)$ Funktion.

□

344-5. Die “voluminöse” Bedingung von **344-4** soll nun in Bezug auf $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, untersucht werden.

344-5(Satz)

a) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$”
und “$\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$”
und “$p \notin x$”
und “p *Menge*” *folgt* “$x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$”.

b) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$”
und “$\{p\} \cup x \in \mathcal{P}(E) \cap (\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$”
und “$p \notin x$”
und “p *Menge*” *folgt* “$x \in \mathcal{P}(E) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$”.

RECH-**Notation**.

Beweis **344-5** `a)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n) \wedge (p \notin x) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **folk**: $p \in \{p\} \cup x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `1`"$p \in \{p\} \cup x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n \ldots$"
folgt via **296-12**: $(\{p\} \cup x) \setminus \{p\} \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`3.1:` Via **238-3** gilt: $(\{p\} \cup x) \setminus \{p\} = x \setminus \{p\}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \notin x \ldots$"
folgt via **5-17**: $x \setminus \{p\} = x$.

`4:` Aus `2` und
aus `3.1`
folgt: $x \setminus \{p\} \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`5:` Aus `4` und
aus `3.2`
folgt: $x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (\{p\} \cup x \in \mathcal{P}(E) \cap (\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)) \wedge (p \notin x) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \{p\} \cup x \in \mathcal{P}(E) \cap (\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n) \ldots$"
folgt via **folk**: $(\{p\} \cup x \in \mathcal{P}(E)) \wedge (\{p\} \cup E \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `1`"$\ldots \{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$" und
aus `VS` gleich "$\ldots (p \notin x) \wedge (p \text{ Menge})$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`2.2:` Aus `1`"$\{p\} \cup x \in \mathcal{P}(E) \ldots$"
folgt via **341-2**: $x \in \mathcal{P}(E)$.

`3:` Aus `2.2`"$x \in \mathcal{P}(E)$" und
aus `2.1`"$x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt via **folk**: $x \in \mathcal{P}(E) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

$\square$

344-6. Die Rekursions-Formel für R, R ist **ana1** von q, x, ist unter bemerkenswerten Voraussetzungen gültig.

344-6(Satz)

a) *Aus* "R *ist* **ana1** *von* q, x" *und* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt "$R(1 + n) = \mathsf{337.0}(R(n), x)$".

b) *Aus* "R *ist* **ana1** *von* q, x"
und "$R(n)$ *Funktion*"
und "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$" *folgt* "$R(1 + n) = \mathsf{337.0}(R(n), x)$".

`RECH`-**Notation**.

$$\mathsf{337.0}(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$$

Beweis **344-6** a) `VS` gleich $(R$ ist **ana1** von $q, x) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + n \in \mathsf{dom}\, R)$.

1: Aus `VS` gleich "$(R$ ist **ana1** von $q, x) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + n \in \mathsf{dom}\, R)$"
folgt via **343-8**: $n \in \mathsf{dom}\, R$.

2: Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$",
aus 1 "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(1 + n) = \mathsf{337.0}(R(n), x)$.

b) `VS` gleich $(R$ ist **ana1** von $q, x) \wedge (R(n)$ Funktion$) \wedge (1 + n \in \mathsf{dom}\, R)$.

1: Aus `VS` gleich "$\ldots R(n)$ Funktion$\ldots$"
folgt via **339-5**: $n \in \mathsf{dom}\, R$.

2: Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$",
aus 1 "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(1 + n) = \mathsf{337.0}(R(n), x)$.

□

344-7. Als Zwischenschritt wird **344-5** mit **341-9** kombiniert.

344-7(Satz) *Es gelte:*

→) $\square$ *Algebra in* A.

→) $q \in A$.

→) R *ist* **ana1** *von* $q, \square$.

→) $n \in \mathbb{N}$.

→) $1 + n \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt

"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \textit{ Menge}) \wedge (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{dom}\,(337.0(R(n), \square))))$
$\Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(R(n)))$".

RECH-Notation.

$$337.0(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$$

Beweis **344-7**

1.1: Aus →) "R ist **ana1** von $q, \square$",
aus →) "$n \in \mathbb{N}$" und
aus →) "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **343-8**: $n \in \mathsf{dom}\, R$.

1.2: Aus →) "$\square$ Algebra in A",
aus →) "$q \in A$",
aus →) "R ist **ana1** von $q, \square$" und
aus →) "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **341-9**: $\mathsf{dom}\,(R(1+n)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+n)})$.

1.3: Aus →) "R ist **ana1** von $q, \square$",
aus →) "$n \in \mathbb{N}$" und
aus →) "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **344-6**: $R(1+n) = 337.0(R(n), \square)$.

...

<u>Beweis **344-7**</u> ...

2.1: Aus →) "$\square$ Algebra in A",
aus →) "$q \in A$",
aus →) "R ist **ana1** von $q, \square$" und
aus 1.1 "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **341-9**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

2.2: Aus →) "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-4**: $-1 + (1 + n) = n$.

3: Aus 1.2 und
aus 2.2
folgt: $\mathsf{dom}\,(R(1 + n)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

$\boxed{\texttt{Thema4}}$

$(\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \text{ Menge}) \wedge (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{dom}\,(337.0(R(n), \square)\,))$.

5: Aus Thema4 "$\ldots \{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{dom}\,(337.0(R(n), \square)\,)$" und
aus 1.3
folgt: $\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{dom}\,(R(1 + n))$.

6: Aus 5 und
aus 3
folgt: $\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

7: Aus →) "$n \in \mathbb{N}$",
aus 6 "$\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$",
aus Thema4 "$(\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \text{ Menge}) \ldots$"
folgt via **344-5**: $\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

8: Aus 7 und
aus 2.1
folgt: $\beta \in \mathsf{dom}\,(R(n))$.

Ergo Thema4:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \text{ Menge}) \wedge (\{\alpha\} \cup \beta \in 337.0(R(n), \square)\,)) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(R(n))).$$

$\square$

344-8. In einem "Doppelschritt" vererbt sich unter interessanten Bedingungen die Funktions-Eigenschaft von $R(n), R(1+n)$ auf $R(1+(1+n))$, R ist **ana1** von $q, \Box$ Algebra in A. Bei Induktions-Beweisen ist es gelegentlich günstiger, an Stelle von $2+n$ den Term $1+(1+n)$ zu verwenden.

344-8(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow$) $\Box$ *tunnelt rechts auf* A.

$\rightarrow$) $q \in A$.

$\rightarrow$) R *ist* **ana1** *von* $q, \Box$.

$\rightarrow$) $R(n), R(1+n)$ *Funktion.*

$\rightarrow$) $1+(1+n) \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt "$R(1+(1+n))$ *Funktion*".

RECH-**Notation**.

Beweis **344-8**

$\mathsf{337.0}(x,y) \;=\{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda\notin\mu)\wedge(\exists\Omega : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge(((\lambda,\Omega),\eta)\in y))\}$

1.1: Aus $\rightarrow$) "$R(n), R(1+n)$ Funktion"
folgt via **339-5**: $n, 1+n \in \mathsf{dom}\, R$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "R ist **ana1** von $q, \Box$",
aus $\rightarrow$) "$\ldots R(1+n)$ Funktion" und
aus $\rightarrow$) "$1+(1+n) \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **344-6**: $R(1+(1+n)) = \mathsf{337.0}(R(1+n), \Box)$.

2: Aus $\rightarrow$) "R ist **ana1** von $q, \Box$",
aus $\rightarrow$) "$R(n) \ldots$ Funktion" und
aus 1.1 "$\ldots 1+n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **344-6**: $R(1+n) = \mathsf{337.0}(R(n), \Box)$.

3: Aus 2 und
aus $\rightarrow$) "$\ldots R(1+n)$ Funktion"
folgt: $\mathsf{337.0}(R(n), \Box)$ Funktion.

...

Beweis **344-8** . . .

4: Aus →) “ R ist **ana1** von $q, \square$ ” und
aus 1.1 “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **340-4**: $n \in \mathbb{N}$.

5: Aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ $q \in A$ ” ,
aus →) “ R ist **ana1** von $q, \square$ ” ,
aus 4 “ $n \in \mathbb{N}$ ” und
aus 1.1 “ $\ldots 1 + n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **344-7**:
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \text{ Menge}) \wedge (\{\alpha\} \cup \beta \in 337.0(R(n), \square)))$
$\Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(R(n)))$.

6: Aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ $q \in A$ ” ,
aus →) “ R ist **ana1** von $q, \square$ ” und
aus 1.1 “ $n \ldots \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **341-9**: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$.

7: Aus →) “ $R(n) \ldots$ Funktion ” ,
aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ $\square$ tunnelt rechts auf A ” ,
aus 3 “ $337.0(R(n), \square)$ Funktion ” ,
aus 5 “ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \text{ Menge}) \wedge (\{\alpha\} \cup \beta \in 337.0(R(n), \square)))$
$\Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(R(n)))$ ” und
aus 6 “ $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$ ”
folgt via **344-4**: $337.0(337.0(R(n), \square))$ Funktion.

8: Aus 7 und
aus 2
folgt: $337.0(R(1 + n), \square)$ Funktion.

9: Aus 8 und
aus 1.2
folgt: $R(1 + (1 + n))$ Funktion.

$\square$

344-9. Einiges über Schranken und Intervalle bereitet in weiterer, noch darzulegender Konsequenz einen "Zweischritt-InduktionsBeweis" vor.

344-9(Satz)

a) *Aus "M antiSymmetrisch"*
und "u untere M_Schranke von E"
folgt "$\langle\cdot \overset{M}{|} u[\subseteq E^C$".

b) *Aus "M antiSymmetrisch"*
und "o obere M_Schranke von E"
folgt "$]o \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq E^C$".

c) *Aus "u untere* $\le$ *_Schranke von E" folgt* "$[-\infty|u[\subseteq E^C$".

d) *Aus "o obere* $\le$ *_Schranke von E" folgt* "$]o|+\infty] \subseteq E^C$".

<u>Beweis **344-9** `a)`</u>

`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (u \text{ untere } M\text{\_Schranke von } E)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} u[$.

`2.1:` Aus `Thema1` “$\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} u[$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` “$\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} u[$”
folgt via **41-25**: $\alpha\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_u$.

`3:` Aus `VS` gleich “M antiSymmetrisch...”,
aus `VS` gleich “...u untere M_Schranke von E” und
aus `2.2` “$\alpha\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_u$”
folgt via **297-3**: $\alpha \notin E$.

`4:` Aus `2.1` “α Menge” und
aus `3` “$\alpha \notin E$”
folgt via **3-2**: $\alpha \in E^C$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} u[) \Rightarrow (\alpha \in E^C)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\langle\cdot \overset{M}{|} u[\subseteq E^C$.

<u>Beweis **344-9**</u> `b)`

`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (o \text{ obere } M\text{\_Schranke von } E)$.

`Thema1` $\alpha \in \left]o \overset{M}{|} \cdot\right\rangle$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \left]o \overset{M}{|} \cdot\right\rangle$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \left]o \overset{M}{|} \cdot\right\rangle$"
folgt via **41-25**: $o\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha$.

`3:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch…",
aus `VS` gleich "…o obere M_Schranke von E" und
aus `2.2` "$o\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha$"
folgt via **297-3**: $\alpha \notin E$.

`4:` Aus `2.1` "α Menge" und
aus `3` "$\alpha \notin E$"
folgt via **3-2**: $\alpha \in E^C$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \left]o \overset{M}{|} \cdot\right\rangle) \Rightarrow (\alpha \in E^C)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\left]o \overset{M}{|} \cdot\right\rangle \subseteq E^C$.

<u>Beweis **344-9**</u> `c)` `VS` gleich u untere $\leq$ _Schranke von E.

`1:` Aus **folk**"$\leq$ antiSymmetrisch" und
aus `VS` gleich "u untere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\langle\cdot \overset{\leq}{|} u[\subseteq E^C$.

`2:` Via **folk** gilt: $\langle\cdot \overset{\leq}{|} u[= [-\infty|u[$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $[-\infty|u[\subseteq E^C$.

`d)` `VS` gleich o obere $\leq$ _Schranke von E.

`1:` Aus **folk**"$\leq$ antiSymmetrisch" und
aus `VS` gleich "o obere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\langle\cdot \overset{\leq}{|} o[\subseteq E^C$.

`2:` Via **folk** gilt: $]o \overset{\leq}{|} \cdot\rangle =]o|+\infty]$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $]o|+\infty] \subseteq E^C$.

$\square$

344-10. Die Lückensätze $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ wirken sich auch auf $\leq$ -Intervalle aus.

344-10(Satz)

a) *Aus* "$m \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$\mathbb{Z} \cap [-\infty|m[= \{\ldots, -1+m\}$".

b) *Aus* "$m \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$\mathbb{Z} \cap]-\infty|m[= \{\ldots, -1+m\}$".

c) $\{a, \ldots, b\} = \{a, \ldots\} \cap \{\ldots, b\}$.

d) $\mathbb{N} \cap \{\ldots, b\} = \{0, \ldots, b\}$.

e) *Aus* "$m \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$\mathbb{N} \cap [-\infty|m[= \{0, \ldots, -1+m\}$".

f) *Aus* "$m \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$\mathbb{N} \cap]-\infty|m[= \{0, \ldots, -1+m\}$".

g) *Aus* "$m \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\mathbb{N} \cap [-\infty|m[= m$".

h) *Aus* "$m \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\mathbb{N} \cap]-\infty|m[= m$".

RECH-**Notation**.

Beweis **344-10**

$\leq$-**Notation**.

...

<u>Beweis **344-10**</u> `a)` `VS` gleich $m \in \mathbb{Z}$.

`Thema1.1` $\alpha \in \mathbb{Z} \cap [-\infty|m[$.

`2:` Aus `Thema1`"1.1" $\alpha \in \mathbb{Z} \cap [-\infty|m[$
folgt via **folk**: $(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha \in [-\infty|m[)$.

`3:` Aus `2`"... $\alpha \in [-\infty|m[$"
folgt via **142-3**: $(-\infty \leq \alpha) \wedge (\alpha < m)$.

`4:` Aus `2`"$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{Z}$" und
aus `3`"$\alpha < m$"
folgt via **LS**$\mathbb{Z}$: $\alpha \leq -1 + m$.

`5:` Aus `2`"$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `4`"$\alpha \leq -1 + m$"
folgt via **169-2**: $\alpha \in \{\ldots, -1 + m\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap [-\infty|m[) \Rightarrow (\alpha \in \{\ldots, -1 + m\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathbb{Z} \cap [-\infty|m[\subseteq \{\ldots, -1 + m\}$"

...

<u>Beweis **344-10**</u> `a)` `VS` gleich $m \in \mathbb{Z}$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\ldots, -1+m\}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $m \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{\ldots, -1+m\}$"
folgt via **169-2**: $(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha \le -1+m)$.

`3.1:` Aus `2.1`"$m \in \mathbb{R}$"
folgt via **307-1**: $-1+m < m$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha \le -1+m$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathbb{S}$.

`4.1:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha \le -1+m$" und
aus `3.1`"$-1+m < m$"
folgt via **folk**: $\alpha < m$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $-\infty \le \alpha$.

`5:` Aus `4.2`"$-\infty \le \alpha$" und
aus `4.1`"$\alpha < m$"
folgt via **142-3**: $\alpha \in [-\infty|m[$.

`6:` Aus `2.2`"$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `5`"$\alpha \in [-\infty|m[$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathbb{Z} \cap [-\infty|m[$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\ldots, -1+m\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{Z} \cap [-\infty|m[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\{\ldots, -1+m\} \subseteq \mathbb{Z} \cap [-\infty|m[$"

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathbb{Z} \cap [-\infty|m[\subseteq \{\ldots, -1+m\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\ldots, -1+m\} \subseteq \mathbb{Z} \cap [-\infty|m[$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathbb{Z} \cap [-\infty|m[= \{\ldots, -1+m\}$.

<u>Beweis **344-10**</u> `b)` `VS` gleich $m \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathbb{Z} \cap \,]-\infty|m[$.

`2:` Aus `Thema1`“1.1” $\alpha \in \mathbb{Z} \cap \,]-\infty|m[$
folgt via **folk**: $(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha \in \,]-\infty|m[)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \alpha \in [-\infty|m[$”
folgt via **142-3**: $(-\infty < \alpha) \wedge (\alpha < m)$.

`4:` Aus `2`“$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$”,
aus `VS` gleich “$m \in \mathbb{Z}$” und
aus `3`“$\alpha < m$”
folgt via **LS**$\mathbb{Z}$: $\alpha \leq -1 + m$.

`5:` Aus `2`“$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$” und
aus `4`“$\alpha \leq -1 + m$”
folgt via **169-2**: $\alpha \in \{\ldots, -1 + m\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap \,]-\infty|m[) \Rightarrow (\alpha \in \{\ldots, -1 + m\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{“}\mathbb{Z} \cap \,]-\infty|m[\, \subseteq \{\ldots, -1 + m\}\text{”}}$

...

<u>Beweis **344-10**</u> `b)` `VS` gleich $m \in \mathbb{Z}$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\ldots, -1+m\}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $m \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{\ldots, -1+m\}$"
folgt via **169-2**: $(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha \le -1+m)$.

`3.1:` Aus `2.1`"$m \in \mathbb{R}$"
folgt via **307-1**: $-1+m < m$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $\alpha \in \mathbb{R}$.

`4.1:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha \le -1+m$" und
aus `3.1`"$-1+m < m$"
folgt via **folk**: $\alpha < m$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\alpha \in \mathbb{R}$"
folgt via **107-4**: $-\infty < \alpha$.

`5:` Aus `4.2`"$-\infty < \alpha$" und
aus `4.1`"$\alpha < m$"
folgt via **142-3**: $\alpha \in \,]-\infty|m[$.

`6:` Aus `2.2`"$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `5`"$\alpha \in \,]-\infty|m[$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathbb{Z} \cap \,]-\infty|m[$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\ldots, -1+m\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{Z} \cap \,]-\infty|m[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\{\ldots, -1+m\} \subseteq \mathbb{Z} \cap \,]-\infty|m[\text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathbb{Z} \cap \,]-\infty|m[\,\subseteq \{\ldots, -1+m\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\ldots, -1+m\} \subseteq \mathbb{Z} \cap \,]-\infty|m[$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathbb{Z} \cap \,]-\infty|m[\,= \{\ldots, -1+m\}$.

<u>Beweis **344-10**</u> `c)`

$$\{a,\ldots,b\} \overset{\mathbf{169-1(Def)}}{=} \mathbb{Z} \cap [a|b] \overset{\mathbf{folk}}{=} \mathbb{Z} \cap [a \overset{\leq}{|} b] \overset{\mathbf{41-36}}{=} \mathbb{Z} \cap ([a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|} b])$$
$$\overset{\mathbf{2-19}}{=} (\mathbb{Z} \cap [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle) \cap (\mathbb{Z} \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]) \overset{\mathbf{169-13}}{=} \{a,\ldots\} \cap (\mathbb{Z} \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|} b])$$
$$\overset{\mathbf{169-13}}{=} \{a,\ldots\} \cap \{\ldots,b\}.$$

`d)`

$$\mathbb{N} \cap \{\ldots,b\} \overset{\mathbf{343-13}}{=} \{0,\ldots\} \cap \{\ldots,b\} \overset{\text{c)}}{=} \{0,\ldots,b\}.$$

`e)` `VS` gleich $m \in \mathbb{Z}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{Z} \cap [-\infty|m[= \{\ldots,-1+m\}$.

`1.2:` Aus **164-4**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **folk**: $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

`2:` $\mathbb{N} \cap [-\infty|m[\overset{1.2}{=} (\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \cap [-\infty|m[\overset{\mathbf{AG}\cap}{=} \mathbb{N} \cap (\mathbb{Z} \cap [-\infty|m[)$
$\overset{1.1}{=} \mathbb{N} \cap \{\ldots,-1+m\} \overset{\text{d)}}{=} \{0,\ldots,-1+m\}$.

`f)` `VS` gleich $m \in \mathbb{Z}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathbb{Z} \cap]-\infty|m[= \{\ldots,-1+m\}$.

`1.2:` Aus **164-4**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **folk**: $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

`2:` $\mathbb{N} \cap]-\infty|m[\overset{1.2}{=} (\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \cap]-\infty|m[\overset{\mathbf{AG}\cap}{=} \mathbb{N} \cap (\mathbb{Z} \cap]-\infty|m[)$
$\overset{1.1}{=} \mathbb{N} \cap \{\ldots,-1+m\} \overset{\text{d)}}{=} \{0,\ldots,-1+m\}$.

`g)` `VS` gleich $m \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $m \in \mathbb{Z}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{N}$"
folgt via **237-6**: $m = \{0,\ldots,-1+m\}$.

`2:` Aus `1.1`"$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\mathbb{N} \cap [-\infty|m[= \{0,\ldots,-1+m\}$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.2`
folgt: $\mathbb{N} \cap [-\infty|m[= m$.

Beweis **344-10** `h)` `VS` gleich $m \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $m \in \mathbb{Z}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{N}$"
folgt via **237-6**: $m = \{0, \ldots, -1 + m\}$.

`2:` Aus `1.1`"$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\mathbb{N} \cap \,]-\infty|m[\, = \{0, \ldots, -1 + m\}$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.2`
folgt: $\mathbb{N} \cap \,]-\infty|m[\, = m$.

$\square$

344-11. Für *natürliche* untere $\leq$ -Schranken von Teilmengen von $\mathbb{N}$ gilt - erwarteter Weise - Interessantes.

344-11(Satz)

a) $x \setminus (x \setminus y) = x \cap y$.

b) *Aus "u untere $\leq$ -Schranke von E" und "$u \in \mathbb{N}$" folgt "$u \subseteq \mathbb{N} \setminus E$".*

c) *Aus "u untere $\leq$ -Schranke von $\mathbb{N} \setminus E$" und "$u \in \mathbb{N}$" folgt "$u \subseteq \mathbb{N} \cap E$".*

d) *Aus "$n \in \mathbb{N}$" und "$n \subseteq E$" und "$m \in \mathbb{N} \setminus E$" folgt "$n \leq m$".*

e) *Aus "$0, 1 \in E$" folgt "$2 \subseteq E$".*

f) *Aus "$0, 1 \in E$" und "$n \in \mathbb{N} \setminus E$" folgt "$2 \leq n$".*

$\leq$**-Notation**.

Beweis **344-11** a)

$$x \setminus (x \setminus y) \stackrel{\textbf{5-12}}{=} (x \cap y) \cup (x \setminus x) \stackrel{\textbf{folk}}{=} (x \cap y) \cup 0 \stackrel{\textbf{folk}}{=} x \cap y.$$

b) VS gleich $(u \text{ untere} \leq \text{-Schranke von } E) \wedge (u \in \mathbb{N})$.

1: Aus VS gleich "u untere $\leq$ -Schranke von $E \ldots$"
folgt via **344-9**: $[-\infty|u[\subseteq E^C$.

2: Aus 1 "$[-\infty|u[\subseteq E^C$"
folgt via **folk**: $\mathbb{N} \cap [-\infty|u[\subseteq \mathbb{N} \cap E^C$.

3: Aus VS gleich "$\ldots u \in \mathbb{N}$"
folgt via **344-10**: $\mathbb{N} \cap [-\infty|u[= u$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $u \subseteq \mathbb{N} \cap E^C$.

5: Via **folk** gilt: $\mathbb{N} \cap E^C = \mathbb{N} \setminus E$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $u \subseteq \mathbb{N} \setminus E$.

<u>Beweis **344-11**</u> `c)` `VS` gleich $(u \text{ untere } \leq\text{\_Schranke von } \mathbb{N} \setminus E) \wedge (u \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "u untere $\leq$_Schranke von $\mathbb{N} \setminus E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots u \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $u \subseteq \mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \setminus E)$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \setminus E) = \mathbb{N} \cap E$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $u \subseteq \mathbb{N} \cap E$.

`d)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \subseteq E) \wedge (m \in \mathbb{N} \setminus E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \setminus E$"
folgt via **folk**: $(m \in \mathbb{N}) \wedge (m \notin E)$.

`2:` Aus `1.2`"$m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $m \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `1.1`"$n \in \mathbb{S}$" und
aus `2`"$m \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $(n \leq m) \vee (m < n)$.

`wfFallunterscheidung`

`3.1.Fall` $m < n$.

`4:` Aus `1.2`"$m \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `3.1.Fall`"$m < n$"
folgt via **197-5**: $m \in n$.

`5:` Aus `4`"$m \in n$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \subseteq E \ldots$"
folgt via **folk**: $m \in E$.

`6:` Via `1.2` gilt: $m \notin E$.

`Ende wfFallunterscheidung` $n \leq m$.

<u>Beweis **344-11**</u> `e)` `VS` gleich $0, 1 \in E$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0, 1 \in E$”
folgt via **folk**: $\{0, 1\} \subseteq E$.

`2:` Aus `1` und
aus **239-1**“$2 = \{0, 1\}$”
folgt: $2 \subseteq E$.

`f)` `VS` gleich $(0, 1 \in E) \wedge (n \in \mathbb{N} \setminus E)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0, 1 \in E \ldots$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $2 \subseteq E$,

`2:` Aus $\in$**schola**“$2 \in \mathbb{N}$”,
aus `1`“$2 \subseteq E$” und
aus `VS` gleich “$\ldots n \in \mathbb{N} \setminus E$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $2 \leq n$.

$\square$

344-12. Neuerlich soll das Rechnen in $\mathbb{N}$ verstärkt werden.

344-12(Satz)

a) $1+(-2+x) = -1+x$.

b) *"$1+(1+(-2+x)) = x$" genau dann, wenn "$(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$".*

c) *Aus "$x \in \mathbb{R}$" folgt "$-2+x < -1+x$" und "$-1+x < x$".*

d) *Aus "$2 \leq n \in \mathbb{N}$" folgt "$-2+n, -1+n \in n$" und "$-2+n \in -1+n$" und "$-2+n, -1+n \in \mathbb{N}$" und "$n = 1+(1+(-2+n))$".*

e) *Aus "$n \in \mathbb{N}$" folgt "$1+(1+n) \in \mathbb{N}$".*

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **344-12** a)

$$1+(-2+x) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (1+(-2))+x \stackrel{+\mathbf{schola}}{=} -1+x.$$

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $1+(1+(-2+x)) = x.$

1: $$1+(1+(-2+x)) \stackrel{\text{a)}}{=} 1+(-1+x) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (1+(-1))+x \stackrel{+\mathbf{schola}}{=} 0+x.$$

2: Aus 1"$1+(1+(-2+x)) = \ldots = 0+x$" und aus VS folgt: $0+x = x.$

3: Aus 2"$0+x = x$" folgt via **FSA**0: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

1: Aus VS gleich "$(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$" folgt via **FSA**0: $0+x = x.$

2: $$1+(1+(-2+x)) \stackrel{\text{a)}}{=} 1+(-1+x) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (1+(-1))+x \stackrel{+\mathbf{schola}}{=} 0+x \stackrel{1}{=} x.$$

<u>Beweis **344-12**</u> `c)` `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.2:` Aus $\in$**schola**"$-2 \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $-2 + x \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1.1`"x Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + x = x$.

`2.2:` Aus `1.2`"$-2 + x \in \mathbb{R}$"
folgt via **307-1**: $-2 + x < 1 + (-2 + x)$.

`2.3:` Aus `1.2`"$-2 + x \in \mathbb{R}$"
folgt via **307-1**: $-2 + x < 2 + (-2 + x)$.

`2.4:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $1 + (-2 + x) = -1 + x$.

`3.1:` Aus `2.2` und
aus `2.4`
folgt: $\boxed{-2 + x < -1 + x}$

`3.2:` $2 + (-2 + x) \overset{\textbf{FSA}}{=} (2 + (-2)) + x \overset{+\textbf{schola}}{=} 0 + x \overset{2.1}{=} x$.

`4:` Aus `2.3` und
aus `3.2`"$2 + (-2 + x) = \ldots = x$"
folgt: $\boxed{-2 + x < x}$

<u>Beweis **344-12**</u> `d)` `VS` gleich $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus $\in$**schola**“$2 \in \mathbb{N}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots n \in \mathbb{N}$” und
aus `VS` gleich “$2 \leq n \ldots$”
folgt via **163-2**: $n - 2 \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots n \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{R}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots n \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: n Zahl.

`2.1:` Via **FS**$-+$ gilt: $-2 + n = n - 2$.

`2.2:` Aus `1.2`“$n \in \mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-2 + n < -1 + n$.

`2.3:` Aus `1.2`“$n \in \mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-1 + n < n$.

`2.4:` Aus `1.3`“n Zahl”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $1 + (1 + (-2 + n)) = n$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `1.1`
folgt: $\boxed{-2 + n \in \mathbb{N}}$

`3.2:` Aus `2.2`“$-2 + n < -1 + n$” und
aus `2.3`$-1 + n < n$
folgt via **folk**: $-2 + n < n$.

`3.3:` Aus `2.4`
folgt: $\boxed{n = 1 + (1 + (-2 + n))}$

`4.1:` Aus `3.1`“$-2 + n \in \mathbb{N}$”
folgt via **folk**: $1 + (-2 + n) \in \mathbb{N}$.

`4.2:` Aus `3.1`“$-2 + n \in \mathbb{N}$”,
aus `VS` gleich “$\ldots n \in \mathbb{N}$” und
aus `3.2`“$-2 + n < n$”
folgt via **197-5**: $\boxed{-2 + n \in n}$

...

<u>Beweis **344-12**</u> `d)` `VS` gleich $2 \le n \in \mathbb{N}$.

...

`5:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $1 + (-2 + n) = -1 + n$.

`6:` Aus `4.1` und
aus `5`
folgt: $\boxed{-1 + n \in \mathbb{N}}$

`7.1:` Aus `3.1` "$-2 + n \in \mathbb{N}$",
aus `6` "$-1 + n \in \mathbb{N}$" und
aus `2.2` "$-2 + n < -1 + n$"
folgt via **197-5**: $\boxed{-2 + n \in -1 + n}$

`7.2:` Aus `6` "$-1 + n \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$" und
aus `2.3` "$-1 + n < n$"
folgt via **197-5**: $\boxed{-1 + n \in n}$

`e)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1` "$1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $1 + (1 + n) \in \mathbb{N}$.

□

344-13. Nun soll ein "Zweischritt-InduktionsBeweis" zur Verfügung gestellt werden.

344-13(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $0, 1 \in x$.

$\rightarrow)$ $\forall\alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha, 1 + \alpha \in x)) \Rightarrow (1 + (1 + \alpha) \in x)$.

Dann folgt "$\mathbb{N} \subseteq x$".

RECH-**Notation**.

Beweis **344-13**

1: Es gilt: $(0 \neq \mathbb{N} \setminus x) \vee (\mathbb{N} \setminus x = 0)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \mathbb{N} \setminus x$.

2: Via **folk** gilt: $\mathbb{N} \setminus x \subseteq \mathbb{N}$.

3: Aus `1.1.Fall`"$0 \neq \mathbb{N} \setminus x$" und
aus 2"$\mathbb{N} \setminus x \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **MMS**$\mathbb{N}$: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } \leq\text{-Minimum von } \mathbb{N} \setminus x) \wedge (\Omega \in \mathbb{N})$.

4: Aus 3"$\ldots \Omega$ ist $\leq$-Minimum von $\mathbb{N} \setminus x \ldots$"
folgt via **38-1(Def)**:
$(\Omega \in \mathbb{N} \setminus x) \wedge (\Omega \text{ untere } \leq\text{-Schranke von } \mathbb{N} \setminus x)$.

5.1: Aus →)"$0, 1 \in x$" und
aus 4"$\Omega \in \mathbb{N} \setminus x \ldots$"
folgt via **344-11**: $2 \leq \Omega$.

5.2: Aus 4"Ω untere $\leq$-Schranke von $\mathbb{N} \setminus x$" und
aus 3"$\ldots \Omega \in \mathbb{N}$"
folgt via **344-11**: $\Omega \subseteq \mathbb{N} \cap x$.

6.1: Via **folk** gilt: $\mathbb{N} \cap x \subseteq x$.

6.2: Aus 5.1"$2 \leq \Omega$" und
aus 3"$\ldots \Omega \in \mathbb{N}$"
folgt via **344-12**:
$(-2 + \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (-2 + \Omega, -1 + \Omega \in \Omega) \wedge (\Omega = 1 + (1 + (-2 + \Omega)))$.

7.1: Via **344-12** gilt: $1 + (-2 + \Omega) = -1 + \Omega$.

7.2: Aus 5.2"$\Omega \subseteq \mathbb{N} \cap x$" und
aus 6.1"$\mathbb{N} \cap x \subseteq x$"
folgt via **folk**: $\Omega \subseteq x$.

8: Aus 6.2"$\ldots -2 + \Omega, -1 + \Omega \in \Omega \ldots$" und
aus 7.2"$\Omega \subseteq x$"
folgt via **folk**: $-2 + \Omega, -1 + \Omega \in x$.

9: Aus 8"$\ldots -1 + \Omega \in x$" und
aus 7.1
folgt: $1 + (-2 + \Omega) \in x$.

10: Aus 6.2"$-2 + \Omega \in \mathbb{N} \ldots$",
aus 8"$-2 + \Omega \ldots \in x$",
aus 9"$1 + (-2 + \Omega) \in x$" und
aus →)"$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha, 1 + \alpha \in x)) \Rightarrow (1 + (1 + \alpha) \in x)$"
folgt: $1 + (1 + (-2 + \Omega)) \in x$.

...

...

Beweis **344-13** ...

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \mathbb{N} \setminus x.$

...

`11:` Aus `10` und
aus `6.2`"... $\Omega = 1 + (1 + (-2 + \Omega))$"
folgt: $\Omega \in x.$

`12:` Aus `4`"$\Omega \in \mathbb{N} \setminus x$ ..."
folgt via **folk**: $\Omega \notin x.$

`Ende wfFallunterscheidung`

`A1` | "$\mathbb{N} \setminus x = 0$"

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathbb{N} \setminus x = 0$"
folgt via **folk**: $\mathbb{N} \subseteq x.$

□

344-14. Unter vertraut erscheinenden Bedinungen stellt sich $\texttt{rf1}q\Box(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ als Funktion heraus.

344-14(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow$) A *Menge.*

$\rightarrow$) $\Box$ *tunnelt rechts auf* A.

$\rightarrow$) $q \in A$.

Dann folgt:

a) $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\texttt{rf1}q\Box(\alpha)$ *Funktion*$)$.

b) $\texttt{rf1}q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$.

Beweis **344-14**

RECH-Notation.
339.1$(x) = \{\omega : x(\omega)$ Funktion$\}$.

1.1: Aus →) "□ Algebra in A" und
aus →) "A Menge"
folgt via **93-9**: □ Menge.

1.2: Via **339-6** gilt: rf1q□(0) Funktion.

2.1: Aus 1.1 "□ Menge"
folgt via **337-29**: dom (rf1q□) $= \mathbb{N}$.

2.2: Aus 1.2 "rf1q□(0) Funktion"
folgt via **339-5**: $0 \in$ 339.1(rf1q□).

3: Aus ∈**schola** "$1 \in \mathbb{N}$" und
aus 2.1
folgt: $1 \in$ dom (rf1q□).

4: Aus →) "□ Algebra in A" und
aus 3 "$1 \in$ dom (rf1q□)"
folgt via **340-3**: rf1q□(1) Funktion.

5: Aus 4 "rf1q□(1) Funktion"
folgt via **339-5**: $1 \in$ 339.1(rf1q□).

...

Beweis **344-14** . . .

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{339.1}(\texttt{rf1}q\Box))$.

`7.1`: Aus `Thema6`“$\alpha \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **344-12**: $1+(1+\alpha) \in \mathbb{N}$.

`7.2`: Aus `Thema6`“$\ldots \alpha, 1+\alpha \in \mathsf{339.1}(\texttt{rf1}q\Box)$”
folgt **p.def.**: $\texttt{rf1}q\Box(\alpha), \texttt{rf1}q\Box(1+\alpha)$ Funktion.

`8.1`: Aus `7.1` und
aus `2.1`
folgt: $1+(1+\alpha) \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf1}q\Box)$.

`8.2`: Via **337-25** gilt: $\texttt{rf1}q\Box$ ist **ana1** von $q, \Box$.

`9`: Aus →) “$\Box$ Algebra in A”,
aus →) “$\Box$ tunnelt rechts auf A”,
aus →) “$q \in A$”,
aus `8.2`“$\texttt{rf1}q\Box$ ist **ana1** von $q, \Box$”,
aus aus `7.2`“$\texttt{rf1}q\Box(\alpha), \texttt{rf1}q\Box(1+\alpha)$ Funktion” und
aus `8.1`“$1+(1+\alpha) \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf1}q\Box)$”
folgt via **344-8**: $\texttt{rf1}q\Box(1+(1+\alpha))$ Funktion.

`10`: Aus `9`“$\texttt{rf1}q\Box(1+(1+\alpha))$ Funktion”
folgt via **339-5**: $1+(1+\alpha) \in \mathsf{339.1}(\texttt{rf1}q\Box)$.

Ergo `Thema6`:

`A1`	“$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{339.1}(\texttt{rf1}q\Box))) \Rightarrow (1+(1+\alpha) \in \mathsf{339.1}(\texttt{rf1}q\Box))$”

`7`: Aus `2.2`“$0 \in \mathsf{339.1}(\texttt{rf1}q\Box)$”,
aus `5`“$1 \in \mathsf{339.1}(\texttt{rf1}q\Box)$” und
aus `A1`“$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{339.1}(\texttt{rf1}q\Box))) \Rightarrow (1+(1+\alpha) \in \mathsf{339.1}(\texttt{rf1}q\Box))$”
folgt via **344-13**: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{339.1}(\texttt{rf1}q\Box)$.

. . .

<u>Beweis</u> **<u>344-14</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema8}}$ $\alpha \in \mathbb{N}$.

9: Aus Thema8 "$\alpha \in \mathbb{N}$" und
aus 7 "$\mathbb{N} \subseteq 339.1(\mathtt{rf}1q\square)$"
folgt via **folk**: $\alpha \in 339.1(\mathtt{rf}1q\square)$.

10: Aus 9 "$\alpha \in 339.1(\mathtt{rf}1q\square)$"
folgt **p.def.**: $\mathtt{rf}1q\square(\alpha)$ Funktion.

Ergo Thema8: Aa) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf}1q\square(\alpha)$ Funktion)"

...

Beweis **344-14** ...

9: Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}q\Box$ Funktion.

$\boxed{\mathtt{Thema10}}$ $\beta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$.

11.1: Aus Thema10 "$\beta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

11.2: Aus 9 "$\mathtt{rf1}q\Box$ Funktion" und
aus Thema10 "$\beta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$"
folgt via **18-24**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \wedge (\beta = \mathtt{rf1}q\Box(\Omega)).$$

12: Aus 11.2 "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box) \ldots$" und
aus 2.1
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

13: Aus 12 und
aus Aa) gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf1}q\Box(\alpha)$ Funktion)"
folgt: $\mathtt{rf1}q\Box(\Omega)$ Funktion.

14: Aus 11.2 "$\ldots \beta = \mathtt{rf1}q\Box(\Omega)$" und
aus 13
folgt: β Funktion.

15: Aus 11.1 "β Menge" und
aus 14 "β Funktion"
folgt via **212-2**: $\beta \in \mathsf{func}$.

Ergo Thema10: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{func})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\mathtt{A2} \mid \text{"}\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box) \subseteq \mathsf{func}\text{"}}$

11.b): Aus 9 "$\mathtt{rf1}q\Box$ Funktion",
aus 2.1 "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box) = \mathbb{N}$" und
aus A2 gleich "$\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box) \subseteq \mathsf{func}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathtt{rf1}q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$.

$\Box$

344-15. Rechts/links tunneln kann durch freundlichere Formulierungen ersetzt werden.

344-15(Satz) *Es gelte:*

→) $\Box$ *kommutativ auf* Q.

→) $\Box$ *assoziativ auf* Q.

Dann folgt:

a) $\Box$ *tunnelt rechts auf* Q.

b) $\Box$ *tunnelt links auf* Q.

Beweis **344-15**

`ALG`-**Notation**

---

a)

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in Q$.

1.1: Aus →) "$\Box$ assoziativ auf Q" und
aus Thema0 "$\alpha, \beta, \gamma \in Q$"
folgt via **211-1(Def)**: $\alpha_\Box(\beta_\Box\gamma) = (\alpha_\Box\beta)_\Box\gamma$.

1.2: Aus →) "$\Box$ kommutativ auf Q" und
aus Thema0 "$\ldots, \beta, \gamma \in Q$"
folgt via **210-1(Def)**: $\beta_\Box\gamma = \gamma_\Box\beta$.

1.3: aus →) "$\Box$ assoziativ auf Q",
aus Thema0 "$\alpha \ldots \in Q$",
aus Thema0 "$\ldots \gamma \in Q$" und
aus Thema0 "$\ldots \beta \ldots \in Q$"
folgt via **211-1(Def)**: $\alpha_\Box(\gamma_\Box\beta) = (\alpha_\Box\gamma)_\Box\beta$.

2: $(\alpha_\Box\beta)_\Box\gamma \stackrel{1.1}{=} \alpha_\Box(\beta_\Box\gamma) \stackrel{1.2}{=} \alpha_\Box(\gamma_\Box\beta)$
$\stackrel{1.3}{=} (\alpha_\Box\gamma)_\Box\beta$.

Ergo Thema0: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow ((\alpha_\Box\beta)_\Box\gamma = (\alpha_\Box\gamma)_\Box\beta)$.
Konsequenz via **344-1(Def)**: $\Box$ tunnelt rechts auf Q.

<u>Beweis</u> **<u>344-15</u>** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in Q$.

`1.1:` Aus →) “ $\Box$ assoziativ auf Q ” und
aus `Thema0` “ $\alpha, \beta, \gamma \in Q$ ”
folgt via **211-1(Def)**: $\alpha_{\_}\Box_{\_}(\beta_{\_}\Box_{\_}\gamma) = (\alpha_{\_}\Box_{\_}\beta)_{\_}\Box_{\_}\gamma$.

`1.2:` Aus →) “ $\Box$ kommutativ auf Q ” und
aus `Thema0` “ $\alpha, \beta, \ldots \in Q$ ”
folgt via **210-1(Def)**: $\alpha_{\_}\Box_{\_}\beta = \beta_{\_}\Box_{\_}\alpha$.

`1.3:` aus →) “ $\Box$ assoziativ auf Q ” ,
aus `Thema0` “ $\ldots \beta \ldots \in Q$ ” ,
aus `Thema0` “ $\alpha \ldots \in Q$ ” und
aus `Thema0` “ $\ldots \gamma \in Q$ ”
folgt via **211-1(Def)**: $\beta_{\_}\Box_{\_}(\alpha_{\_}\Box_{\_}\gamma) = (\beta_{\_}\Box_{\_}\alpha)_{\_}\Box_{\_}\gamma$.

`2:` $\alpha_{\_}\Box_{\_}(\beta_{\_}\Box_{\_}\gamma) \stackrel{1.1}{=} (\alpha_{\_}\Box_{\_}\beta)_{\_}\Box_{\_}\gamma \stackrel{1.2}{=} (\beta_{\_}\Box_{\_}\alpha)_{\_}\Box_{\_}\gamma$
$\stackrel{1.3}{=} \beta_{\_}\Box_{\_}(\alpha_{\_}\Box_{\_}\gamma)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow (\alpha_{\_}\Box_{\_}(\beta_{\_}\Box_{\_}\gamma) = \beta_{\_}\Box_{\_}(\alpha_{\_}\Box_{\_}\gamma))$.
Konsequenz via **344-1(Def)**: $\Box$ tunnelt links auf Q.

$\Box$

344-16. Nun werden **344-14,15** wohlwollend zusammen geführt.

344-16(Satz) *Es gelte:*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) A *Menge.*

→) $\Box$ *kommutativ auf* A.

→) $\Box$ *assoziativ auf* A.

→) $q \in A$.

Dann folgt:

a) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf1}q\Box(\alpha)$ *Funktion*$)$.

b) $\mathtt{rf1}q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$.

Beweis **344-16**

`ALG`-**Notation**.

1: Aus →) "$\Box$ kommutativ auf A" und
aus →) "$\Box$ assoziativ auf A"
folgt via **344-15**: $\Box$ tunnelt rechts auf A.

2.a): Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "A Menge",
aus 1 "$\Box$ tunnelt rechts auf A" und
aus →) "$q \in A$"
folgt via **344-14**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf1}q\Box(\alpha)$ Funktion$)$.

2.b): Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "A Menge",
aus 1 "$\Box$ tunnelt rechts auf A" und
aus →) "$q \in A$"
folgt via **344-14**: $\mathtt{rf1}q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$.

$\Box$

344-17. Die zwei hier erwähnten Aussagen sind in der Tat äquivalent

344-17(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\square$ *tunnelt rechts auf* Q.

`ii)` $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta, \gamma \in Q) \wedge (\beta \neq \gamma))$
$$\Rightarrow ((\alpha{}_{-}\square{}_{-}\beta){}_{-}\square{}_{-}\gamma = (\alpha{}_{-}\square{}_{-}\gamma){}_{-}\square{}_{-}\beta).$$

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **344-17**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\qquad \Box$ tunnelt rechts auf Q.

1: Aus `VS` gleich "$\Box$ tunnelt rechts auf Q"
folgt via **344-1(Def)**:
$$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow ((\alpha \_\Box\_ \beta) \_\Box\_ \gamma = (\alpha \_\Box\_ \gamma) \_\Box\_ \beta).$$

2: Aus 1
folgt:
$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta, \gamma \in Q) \wedge (\beta \neq \alpha)) \Rightarrow ((\alpha \_\Box\_ \beta) \_\Box\_ \gamma = (\alpha \_\Box\_ \gamma) \_\Box\_ \beta).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $\quad \forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta, \gamma \in Q) \wedge (\beta \neq \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \_\Box\_ \beta) \_\Box\_ \gamma = (\alpha \_\Box\_ \gamma) \_\Box\_ \beta).$

`Thema0` $\qquad \delta, \epsilon, \eta \in Q$.

1: Es gilt: $\qquad (\epsilon = \eta) \vee (\epsilon \neq \eta)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\qquad \epsilon = \eta$.

2: $\qquad (\delta \_\Box\_ \epsilon) \_\Box\_ \eta \stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=} (\delta \_\Box\_ \eta) \_\Box\_ \eta \stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=} (\delta \_\Box\_ \eta) \_\Box\_ \epsilon.$

3: Aus 2
folgt: $\qquad (\delta \_\Box\_ \epsilon) \_\Box\_ \eta = (\delta \_\Box\_ \eta) \_\Box\_ \epsilon.$

`1.2.Fall` $\qquad \delta \neq \epsilon$.

Aus `Thema0`"$\delta, \epsilon, \eta \in Q$",
aus `1.2.Fall`"$\epsilon \neq \eta$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta, \gamma \in Q) \wedge (\beta \neq \gamma))$
$\Rightarrow ((\alpha \_\Box\_ \beta) \_\Box\_ \gamma = (\alpha \_\Box\_ \gamma) \_\Box\_ \beta)$"
folgt: $\qquad (\delta \_\Box\_ \epsilon) \_\Box\_ \eta = (\delta \_\Box\_ \eta) \_\Box\_ \epsilon.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(\delta \_\Box\_ \epsilon) \_\Box\_ \eta = (\delta \_\Box\_ \eta) \_\Box\_ \epsilon.$$

Ergo `Thema0`: $\qquad \forall \delta, \epsilon, \eta : (\delta, \epsilon, \eta \in Q) \Rightarrow ((\delta \_\Box\_ \epsilon) \_\Box\_ \eta = (\delta \_\Box\_ \eta) \_\Box\_ \epsilon).$

Konsequenz: $\qquad \forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow ((\alpha \_\Box\_ \beta) \_\Box\_ \gamma = (\alpha \_\Box\_ \gamma) \_\Box\_ \beta).$

Konsequenz via **344-1(Def)**: $\qquad \Box$ tunnelt rechts auf Q.

$\Box$

Algebra: $\overset{\mathsf{fin}}{q,} x$.
$\overset{\mathsf{fin}}{q,} \Box$, $\Box$ Algebra in A.

Ersterstellung: 16/06/15 **Letzte Änderung: 13/12/15**

345-1. Das Ziel, jeder *endlichen* Teilmenge von $\mathbb{A}$ eine Summe zuzuordnen, ist nur mehr einen Steinwurf weit entfernt. Die Funktion, die dies bewerkstelligen wird, soll in allgemeiner Weise als Klasse - die noch keine Funktion sein muss - in die Essays eingebracht.

345-1(Definition)

$$\overset{\mathsf{fin}}{q,} x = \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx).$$

345-2. Die interessante Gestalt von $q \overset{\mathsf{fin}}{,} x$ motiviert, sich mit dem "Element-Sein" in $\bigcup \mathsf{dom}\, x$ und $\bigcup \mathsf{ran}\, x$ auseinander zu setzen. Hierbei muss x zunächst noch keine Funktion sein.

345-2(Satz)

a) *Aus "$w \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$" folgt "$\exists \Omega, \Phi : (w \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$".*

b) *Aus "$w \in \bigcup \mathsf{ran}\, x$" folgt "$\exists \Omega, \Phi : (w \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$".*

c) *Aus "$w \in p$" und "$(p, q) \in x$" folgt "$w \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$".*

d) *Aus "$w \in q$" und "$(p, q) \in x$" folgt "$w \in \bigcup \mathsf{ran}\, x$".*

Beweis **345-2** a) VS gleich $w \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$.

1: Aus VS gleich "$w \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : w \in \Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **folk**: $\exists \Phi : (\Omega, \Phi) \in x$.

3: Aus 1"$\exists \Omega \ldots$",
aus 2"$\exists \Phi \ldots$",
aus 1"$\ldots w \in \Omega \ldots$" und
aus 2"$\ldots (\Omega, \Phi) \in x$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (w \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$.

b) VS gleich $w \in \bigcup \mathsf{ran}\, x$.

1: Aus VS gleich "$w \in \bigcup \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **folk**: $\exists \Phi : w \in \Phi \in \mathsf{ran}\, x$.

2: Aus 1"$\ldots \Phi \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega, \Phi) \in x$.

3: Aus 2"$\exists \Omega \ldots$",
aus 1"$\exists \Phi \ldots$",
aus 1"$\ldots w \in \Phi \ldots$" und
aus 2"$\ldots (\Omega, \Phi) \in x$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (w \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$.

<u>Beweis **345-2**</u> `c)` `VS` gleich $(w \in p) \wedge ((p, q) \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p, q) \in x$"
folgt via **folk**: $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$w \in p \ldots$" und
aus `1` "$p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **folk**: $w \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$.

`d)` `VS` gleich $(w \in q) \wedge ((p, q) \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p, q) \in x$"
folgt via **folk**: $q \in \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$w \in q \ldots$" und
aus `1` "$q \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **folk**: $w \in \bigcup \mathsf{ran}\, x$.

$\square$

345-3. Ist x injektiv oder ist x eine Funktion, so nimmt **345-2** andere Form an.

345-3(Satz)

a) *Aus "x injektiv" und "$w \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$"*
folgt "$\exists \Phi : (\Phi \in \mathsf{ran}\, x) \wedge (w \in x^{-1}(\Phi))$".

b) *Aus "f Funktion" und "$w \in \bigcup \mathsf{ran}\, f$"*
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (w \in f(\Omega))$".

c) *Aus "x injektiv" und "$q \in \mathsf{ran}\, x$" und "$w \in x^{-1}(q)$"*
folgt "$w \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$".

d) *Aus "f Funktion" und "$p \in \mathsf{dom}\, f$" und "$w \in f(p)$"*
folgt "$w \in \bigcup \mathsf{ran}\, f$".

Beweis **345-3** a) VS gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (w \in \bigcup \mathsf{dom}\, x)$.

1.1: Aus VS gleich "x injektiv…"
folgt via **19-1**: x^{-1} Funktion.

1.2: Aus VS gleich "…$w \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **345-2**: $\exists \Omega, \Phi : (w \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$.

2.1: Aus 1.2"…$(\Omega, \Phi) \in x$"
folgt via **11-4**: $(\Phi, \Omega) \in x^{-1}$.

2.2: Aus 1.2"…$(\Omega, \Phi) \in x$"
folgt via **folk**: $\Phi \in \mathsf{ran}\, x$.

3: Aus 1.1"x^{-1} Funktion" und
aus 2"$(\Phi, \Omega) \in x^{-1}$"
folgt via **folk**: $\Omega = x^{-1}(\Phi)$.

4: Aus 1.2"…$w \in \Omega$…" und
aus 3
folgt: $w \in x^{-1}(\Phi)$.

5: Aus 1.2"$\exists$…Φ…",
aus 2.2 und
aus 4
folgt: $\exists \Phi : (\Phi \in \mathsf{ran}\, x) \wedge (w \in x^{-1}(\Phi))$.

<u>Beweis **345-3**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (w \in \bigcup \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in \bigcup \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **345-2**: $\exists \Omega, \Phi : (w \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in f)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus `1`"$\ldots (\Omega, \Phi) \in f$"
folgt via **folk**: $\Phi = f(\Omega)$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, \Phi) \in f$"
folgt via **folk**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `1`"$\ldots w \in \Phi \ldots$" und
aus `2.1`
folgt: $w \in f(\Omega)$.

`4:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (w \in f(\Omega))$.

`c)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (q \in \mathsf{ran}\, x) \wedge (w \in x^{-1}(q))$.

`1:` Aus `VS` gleich "x injektiv$\ldots$"
folgt via **19-1**: x^{-1} Funktion.

`2:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in \mathsf{ran}\, x \ldots$" und
aus `2`
folgt: $q \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$.

`4:` Aus `1`"x^{-1} Funktion" und
aus `3`"$q \in \mathsf{dom}\,(x^{-1})$"
folgt via **folk**: $(q, x^{-1}(q)) \in x^{-1}$.

`5:` Aus `4`"$(q, x^{-1}(q)) \in x^{-1}$"
folgt via **11-4**: $(x^{-1}(q), q) \in x$.

`6:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in x^{-1}(q)$" und
aus `5`"$(x^{-1}(q), q) \in x$"
folgt via **345-2**: $w \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$.

<u>Beweis</u> **<u>345-3</u>** `d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (w \in f(p))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f) \ldots$"
folgt via **folk**: $(p, f(p)) \in f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in f(p)$" und
aus `1`"$(p, f(p)) \in f$"
folgt via **345-2**: $w \in \bigcup \mathsf{ran}\, f$.

345-4. Nun soll das “Element-Sein” in $\overset{\mathsf{fin}}{q,x}$ angesprochen werden. Dabei ist es hilfreich, dass $\mathtt{rf1}qx$ stets eine Funktion ist.

<u>345-4(Satz)</u>

a) *Aus* “$w \in \overset{\mathsf{fin}}{q,x}$” *folgt* “$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge (w \in \mathtt{rf1}qx(\Omega))$”.

b) *Aus* “$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$” *und* “$w \in \mathtt{rf1}qx(n)$” *folgt* “$w \in \overset{\mathsf{fin}}{q,x}$”.

<u>Beweis **345-4**</u> a) VS gleich $w \in \overset{\mathsf{fin}}{q,x}$.

1: Aus VS gleich “$w \in \overset{\mathsf{fin}}{q,x}$”
folgt **p.def.**: $w \in \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

2: Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ Funktion.

3: Aus 2“$\mathtt{rf1}qx$ Funktion” und
aus 1“$w \in \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx)$”
folgt via **345-3**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge (w \in \mathtt{rf1}qx(\Omega))$.

b) VS gleich $(n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge (w \in \mathtt{rf1}qx(n))$.

1: Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ Funktion.

2: Aus 1“$\mathtt{rf1}qx$ Funktion”,
aus VS gleich “$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) \ldots$” und
aus VS gleich “$\ldots w \in \mathtt{rf1}qx(n)$”
folgt via **345-3**: $w \in \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

3: Aus 2“$w \in \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx)$”
folgt **p.def.**: $w \in \overset{\mathsf{fin}}{q,x}$.

□

345-5. Nun sollen Definitions- und Werte-Bereiche von $\bigcup \mathsf{dom}\, x$ und $\bigcup \mathsf{ran}\, x$ untersucht werden.

345-5(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$"
folgt $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((p, \Gamma) \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$".

b) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, x)$"
folgt $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((p, \Gamma) \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$".

c) *Aus* "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$"
folgt $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Gamma, q) \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$".

d) *Aus* "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, x)$"
folgt $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Gamma, q) \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$".

e) *Aus* "$(p, q) \in u$" *und* "$(u, v) \in x$"
folgt "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$" *und* "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$".

f) *Aus* "$(p, q) \in v$" *und* "$(u, v) \in x$"
folgt "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, x)$" *und* "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, x)$".

Beweis **345-5** a) VS gleich $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$"
folgt via **folk**: $\exists \Gamma : (p, \Gamma) \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$.

2: Aus 1"$\ldots (p, \Gamma) \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **345-2**: $\exists \Omega, \Phi : ((p, \Gamma) \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$.

3: Aus 2"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus 1"$\exists \Gamma \ldots$" und
aus 2"$\ldots ((p, \Gamma) \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((p, \Gamma) \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$.

<u>Beweis</u> **345-5** `b)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, x)$"
folgt via **folk**: $\exists \Gamma : (p, \Gamma) \in \bigcup \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (p, \Gamma) \in \bigcup \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **345-2**: $\exists \Omega, \Phi : ((p, \Gamma) \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$.

`3:` Aus `2`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `1`"$\exists \Gamma \ldots$" und
aus `2`"$\ldots ((p, \Gamma) \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((p, \Gamma) \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$.

`c)` `VS` gleich $q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$"
folgt via **folk**: $\exists \Gamma : (\Gamma, q) \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Gamma, q) \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **345-2**: $\exists \Omega, \Phi : ((\Gamma, q) \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$.

`3:` Aus `2`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `1`"$\exists \Gamma \ldots$" und
aus `2`"$\ldots ((\Gamma, q) \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Gamma, q) \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$.

`d)` `VS` gleich $q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, x)$"
folgt via **folk**: $\exists \Gamma : (\Gamma, q) \in \bigcup \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Gamma, q) \in \bigcup \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **345-2**: $\exists \Omega, \Phi : ((\Gamma, q) \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$.

`3:` Aus `2`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `1`"$\exists \Gamma \ldots$" und
aus `2`"$\ldots ((\Gamma, q) \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Gamma, q) \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$.

`e)` `VS` gleich $((p, q) \in u) \wedge ((u, v) \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$((p, q) \in u) \wedge ((u, v) \in x)$"
folgt via **345-2**: $(p, q) \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1`"$(p, q) \in \bigcup \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **folk**: $(p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x))$.

<u>Beweis **345-5**</u> `f)` `VS` gleich $((p,q)\in v)\wedge((u,v)\in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$((p,q)\in v)\wedge((u,v)\in x)$"
folgt via **345-2**: $(p,q)\in\bigcup\mathsf{ran}\,x$.

`2:` Aus `1` "$(p,q)\in\bigcup\mathsf{ran}\,x$"
folgt via **folk**: $(p\in\mathsf{dom}\,(\bigcup\mathsf{ran}\,x))\wedge(q\in\mathsf{ran}\,(\bigcup\mathsf{ran}\,x))$.

$\square$

345-6. Unter anderem um ein Beweis-Detail zur Injektivität nicht noch einmal versteckt zu wiederholen, soll dieses an die Oberfläche gebracht werden.

345-6(Satz)

a) *Aus "x injektiv" und "$q \in \mathsf{ran}\, x$" folgt "$(x^{-1}(q), q) \in x$".*

b) *Aus "$n \in \mathbb{N}$" folgt "$-1 + n < n$".*

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **345-6** `a)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (q \in \mathsf{ran}\, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega, q) \in x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, q) \in x$" und
aus `VS` gleich "x injektiv…"
folgt via **322-2**: $\Omega = x^{-1}(q)$.

`3:` Aus `2`"$\Omega = x^{-1}(q)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, q) = (x^{-1}(q), q)$.

`4:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, q) \in x$" und
aus `3`
folgt: $(x^{-1}(q), q) \in x$.

`b)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$n \in \mathbb{R}$"
folgt via **307-1**: $-1 + n < n$.

□

345-7. Ist x injektiv oder eine Funktion, so stellt sich **345-5** etwas gefälliger dar.

345-7(Satz)

a) *Aus* "x *injektiv*" *und* "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\,x)$"
folgt "$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi \in \mathsf{ran}\,x) \wedge ((p, \Gamma) \in x^{-1}(\Phi))$".

b) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,f)$"
folgt "$\exists \Omega, \Gamma : (\Omega \in \mathsf{dom}\,f) \wedge ((p, \Gamma) \in f(\Omega))$".

c) *Aus* "x *injektiv*" *und* "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\,x)$"
folgt "$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi \in \mathsf{ran}\,x) \wedge ((\Gamma, q) \in x^{-1}(\Phi))$".

d) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,f)$"
folgt "$\exists \Omega, \Gamma : (\Omega \in \mathsf{dom}\,f) \wedge ((\Gamma, q) \in f(\Omega))$".

e) *Aus* "x *injektiv*" *und* "$(p, q) \in x^{-1}(v)$" *und* "$v \in \mathsf{ran}\,x$"
folgt "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\,x)$" *und* "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\,x)$".

f) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$(p, q) \in f(u)$" *und* "$u \in \mathsf{dom}\,f$"
folgt "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,f)$" *und* "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,f)$".

Beweis **345-7** a) VS gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\,x))$.

1: Aus VS gleich "$\ldots p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\,x)$"
folgt via **345-5**:
$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((p, \Gamma) \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x).$$

2.1: Aus 1 "$\ldots (\Omega, \Phi) \in x$" und
aus VS gleich "x injektiv"
folgt via **322-2**:
$$\Omega = x^{-1}(\Phi).$$

2.2: Aus 1 "$\ldots (\Omega, \Phi) \in x$"
folgt via **folk**:
$$\Phi \in \mathsf{ran}\,x.$$

3: Aus 1 "$\ldots (p, \Gamma) \in \Omega \ldots$" und
aus 2.1
folgt:
$$(p, \Gamma) \in x^{-1}(\Phi).$$

4: Aus 1 "$\exists \ldots \Phi, \Gamma \ldots$",
aus 2.2 und
aus 3
folgt:
$$\exists \Phi, \Gamma : (\Phi \in \mathsf{ran}\,x) \wedge ((p, \Gamma) \in x^{-1}(\Phi)).$$

<u>Beweis **345-7**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f))$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f)$”
folgt via **345-5**: $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((p, \Gamma) \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in f)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich “f Funktion...” und
aus `1`“$\ldots (\Omega, \Phi) \in f$”
folgt via **folk**: $\Phi = f(\Omega)$.

`2.2:` Aus `1`“$\ldots (\Omega, \Phi) \in f$”
folgt via **folk**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `1`“$\ldots (p, \Gamma) \in \Phi \ldots$” und
aus `2.1`
folgt: $(p, \Gamma) \in f(\Omega)$.

`4:` Aus `1`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `1`“$\exists \ldots \Gamma \ldots$”,
aus `2.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega, \Gamma : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge ((p, \Gamma) \in f(\Omega))$.

`c)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x))$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$”
folgt via **345-5**:
$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Gamma, q) \in \Omega) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x)$.

`2.1:` Aus `1`“$\ldots (\Omega, \Phi) \in x$” und
aus `VS` gleich “x injektiv”
folgt via **322-2**: $\Omega = x^{-1}(\Phi)$.

`2.2:` Aus `1`“$\ldots (\Omega, \Phi) \in x$”
folgt via **folk**: $\Phi \in \mathsf{ran}\, x$.

`3:` Aus `1`“$\ldots (\Gamma, q) \in \Omega \ldots$” und
aus `2.1`
folgt: $(\Gamma, q) \in x^{-1}(\Phi)$.

`4:` Aus `1`“$\exists \ldots \Phi, \Gamma \ldots$”,
aus `2.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi \in \mathsf{ran}\, x) \wedge ((\Gamma, q) \in x^{-1}(\Phi))$.

<u>Beweis **345-7**</u> `d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f)$"
folgt via **345-5**: $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Gamma, q) \in \Phi) \wedge ((\Omega, \Phi) \in f)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `1`"$\ldots (\Omega, \Phi) \in f$"
folgt via **folk**: $\Phi = f(\Omega)$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, \Phi) \in f$"
folgt via **folk**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `1`"$\ldots (\Gamma, q) \in \Phi \ldots$" und
aus `2.1`
folgt: $(\Gamma, q) \in f(\Omega)$.

`4:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1`"$\exists \ldots \Gamma \ldots$",
aus `2.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega, \Gamma : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge ((\Gamma, q) \in f(\Omega))$.

`e)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge ((p, q) \in x^{-1}(v)) \wedge (v \in \mathsf{ran}\, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots v \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **345-6**: $(x^{-1}(v), v) \in x$.

`2:` Aus `VS` gleich "x injektiv...",
aus `VS` gleich "$\ldots (p, q) \in x^{-1}(v) \ldots$" und
aus `1`"$(x^{-1}(v), v) \in x$"
folgt via **345-5**: $(p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x))$.

`f)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge ((p, q) \in f(u)) \wedge (u \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `VS` gleich "$\ldots u \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **folk**: $(u, f(u)) \in f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p, q) \in f(u) \ldots$" und
aus `1`"$(u, f(u)) \in f$"
folgt via **345-5**: $(p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f)) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f))$.

□

345-8. $\overset{\mathsf{fin}}{q,x}$ wartet geradezu auf die Anwendung von **345-7**.

345-8(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{q,x})$" *folgt* "$\exists \Omega, \Gamma : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge ((p, \Gamma) \in \mathtt{rf1}qx(\Omega))$.

b) *Aus* "$q \in \mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{q,x})$" *folgt* "$\exists \Omega, \Gamma : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge ((\Gamma, q) \in \mathtt{rf1}qx(\Omega))$.

c) *Aus* "$(p, q) \in \mathtt{rf1}qx(n)$" *und* "$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$" *folgt* "$p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{q,x})$" *und* "$q \in \mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{q,x})$".

Beweis **345-8** a) VS gleich $p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{q,x})$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{q,x})$"
folgt **p.def.**: $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx))$.

2: Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ Funktion.

3: Aus 2"$\mathtt{rf1}qx$ Funktion" und
aus 1"$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx))$"
folgt via **345-7**: $\exists \Omega, \Gamma : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge ((p, \Gamma) \in \mathtt{rf1}qx(\Omega))$.

b) VS gleich $q \in \mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{q,x})$.

1: Aus VS gleich "$q \in \mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{q,x})$"
folgt **p.def.**: $q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx))$.

2: Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ Funktion.

3: Aus 2"$\mathtt{rf1}qx$ Funktion" und
aus 1"$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx))$"
folgt via **345-7**: $\exists \Omega, \Gamma : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge ((\Gamma, q) \in \mathtt{rf1}qx(\Omega))$.

c) VS gleich $((p, q) \in \mathtt{rf1}qx(n)) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx))$.

1: Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ Funktion.

2: Aus 1"$\mathtt{rf1}qx$ Funktion" und
aus VS gleich "$((p, q) \in \mathtt{rf1}qx(n)) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx))$"
folgt via **345-7**: $(p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx))) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx)))$.

3: Aus 2
folgt **p.def.**: $(p \in \mathsf{dom}\,(q \overset{\mathsf{fin}}{,} x)) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(q \overset{\mathsf{fin}}{,} x))$.

$\square$

345-9. Eine etwas weniger aufwändige Darstellung von **345-7** entsteht, wenn auf geeignete Definitions- und Werte-Bereiche zurück gegangen wird.

345-9(Satz)

a) *Aus* "x *injektiv*" *und* "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$"
folgt "$\exists \Phi : (\Phi \in \mathsf{ran}\, x) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(x^{-1}(\Phi)))$".

b) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f)$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(f(\Omega)))$".

c) *Aus* "x *injektiv*" *und* "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$"
folgt "$\exists \Phi : (\Phi \in \mathsf{ran}\, x) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(x^{-1}(\Phi)))$".

d) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f)$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(f(\Omega)))$".

e) *Aus* "x *injektiv*" *und* "$p \in \mathsf{dom}\,(x^{-1}(v))$" *und* "$v \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$".

f) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$p \in \mathsf{dom}\,(f(u))$" *und* "$u \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f)$".

g) *Aus* "x *injektiv*" *und* "$q \in \mathsf{ran}\,(x^{-1}(v))$" *und* "$v \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$".

h) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$q \in \mathsf{ran}\,(f(u))$" *und* "$u \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt "$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f)$".

Beweis **345-9** a) VS gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x))$.

1: Aus VS gleich "$(x \text{ injektiv}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x))$"
folgt via **345-7**: $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi \in \mathsf{ran}\, x) \wedge ((p, \Gamma) \in x^{-1}(\Phi))$.

2: Aus 1"$\ldots (p, \Gamma) \in x^{-1}(\Phi)$"
folgt via **folk**: $p \in \mathsf{dom}\,(x^{-1}(\Phi))$.

3: Aus 1"$\exists \Phi \ldots$",
aus 1"$\ldots \Phi \in \mathsf{ran}\, x \ldots$" und
aus 2
folgt: $\exists \Phi : (\Phi \in \mathsf{ran}\, x) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(x^{-1}(\Phi)))$.

<u>Beweis **345-9**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktio}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f))$"
folgt via **345-7**: $\exists \Omega, \Gamma : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge ((p, \Gamma) \in f(\Omega))$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (p, \Gamma) \in f(\Omega)$"
folgt via **folk**: $p \in \mathsf{dom}\,(f(\Omega))$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(f(\Omega)))$.

`c)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(x \text{ injektiv}) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x))$"
folgt via **345-7**: $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi \in \mathsf{ran}\, x) \wedge ((\Gamma, q) \in x^{-1}(\Phi))$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Gamma, q) \in x^{-1}(\Phi)$"
folgt via **folk**: $q \in \mathsf{ran}\,(x^{-1}(\Phi))$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Phi \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Phi \in \mathsf{ran}\, x \ldots$" und
aus `2`
folgt: $\exists \Phi : (\Phi \in \mathsf{ran}\, x) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(x^{-1}(\Phi)))$.

`d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f))$"
folgt via **345-7**: $\exists \Omega, \Gamma : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge ((\Gamma, q) \in f(\Omega))$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Gamma, q) \in f(\Omega)$"
folgt via **folk**: $q \in \mathsf{ran}\,(f(\Omega))$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(f(\Omega)))$.

`e)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(x^{-1}(v))) \wedge (v \in \mathsf{ran}\, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{dom}\,(x^{-1}(v)) \ldots$"
folgt via **folk**: $\exists \Psi : (p, \Psi) \in x^{-1}(v)$.

`2:` Aus `VS` gleich "x injektiv$\ldots$",
aus `1`"$\ldots (p, \Psi) \in x^{-1}(v)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots v \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **345-7**: $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$.

<u>Beweis **345-9**</u> `f)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(f(u))) \wedge (u \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{dom}\,(f(u)) \ldots$"
folgt via **folk**: $\exists \Psi : (p, \Psi) \in f(u)$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion… ",
aus `1` "$\ldots (p, \Psi) \in f(u)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots u \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **345-7**: $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f)$.

`g)` `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(x^{-1}(v))) \wedge (v \in \mathsf{ran}\, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in \mathsf{ran}\,(x^{-1}(v)) \ldots$"
folgt via **folk**: $\exists \Psi : (\Psi, q) \in x^{-1}(v)$.

`2:` Aus `VS` gleich "x injektiv… ",
aus `1` "$\ldots (\Psi, q) \in x^{-1}(v)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots v \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **345-7**: $q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{dom}\, x)$.

`h)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(f(u))) \wedge (u \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in \mathsf{ran}\,(f(u)) \ldots$"
folgt via **folk**: $\exists \Psi : (\Psi, q) \in f(u)$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion… ",
aus `1` "$\ldots (\Psi, q) \in f(u)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots u \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **345-7**: $q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\, f)$.

$\square$

345-10. Mit Hilfe von **345-9** können Definitions- und Werte-Bereich von $\overset{\mathsf{fin}}{q,x}$ gut charakterisiert werden.

345-10(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{q,x})$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx(\Omega)))$".

b) *Aus* "$q \in \mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{q,x})$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx(\Omega)))$".

c) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx(n))$" *und* "$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$"
folgt "$p \in \mathsf{dom}\,(\overset{\mathsf{fin}}{q,x})$".

d) *Aus* "$q \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx(n))$" *und* "$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$"
folgt "$q \in \mathsf{ran}\,(\overset{\mathsf{fin}}{q,x})$".

<u>Beweis **345-10**</u> `a)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\,(q \overset{\mathsf{fin}}{,} x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\,(q \overset{\mathsf{fin}}{,} x)$"
folgt **p.def.**: $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}1qx))$.

`2:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf}1qx$ Funktion.

`3:` Aus `2`"$\mathtt{rf}1qx$ Funktion" und
aus `1`"$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}1qx))$"
folgt via **345-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx)) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx(\Omega)))$.

`b)` `VS` gleich $q \in \mathsf{ran}\,(q \overset{\mathsf{fin}}{,} x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in \mathsf{ran}\,(q \overset{\mathsf{fin}}{,} x)$"
folgt **p.def.**: $q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}1qx))$.

`2:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf}1qx$ Funktion.

`3:` Aus `2`"$\mathtt{rf}1qx$ Funktion" und
aus `1`"$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}1qx))$"
folgt via **345-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx)) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}1qx(\Omega)))$.

`c)` `VS` gleich $(p \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx(n))) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx))$.

`1:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf}1qx$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\mathtt{rf}1qx$ Funktion" und
aus `VS` gleich "$(p \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx(n))) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx))$"
folgt via **345-9**: $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}1qx))$.

`3:` Aus `2`
folgt **p.def.**: $p \in \mathsf{dom}\,(q \overset{\mathsf{fin}}{,} x)$.

`d)` `VS` gleich $(q \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}1qx(n))) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx))$.

`1:` Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf}1qx$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\mathtt{rf}1qx$ Funktion" und
aus `VS` gleich "$(q \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}1qx(n))) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx))$"
folgt via **345-9**: $q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}1qx))$.

`3:` Aus `2`
folgt **p.def.**: $q \in \mathsf{ran}\,(q \overset{\mathsf{fin}}{,} x)$.

$\square$

345-11. Hier wird Einiges über $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, nachgereicht.

345-11(Satz)

a) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$".

c) *Aus* "x *endlich*" *folgt* "$x \in \mathcal{U}_{\#(x)} \setminus \mathcal{U}_{-1+\#(x)}$".

d) *Aus* "$w \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" *folgt* "$w \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{\#(w)} \setminus \mathcal{U}_{-1+\#(w)})$".

e) *Aus* "$w \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (w \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}))$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **345-11**

$\leq$-**Notation**.

---

a) `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

1: Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **240-19**: $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

2: Via **folk** gilt: $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \subseteq \mathcal{U}_n$.

3: Aus 2"$\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \subseteq \mathcal{U}_n$" und
aus 1"$\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$"
folgt via **folk**: $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$.

<u>Beweis **345-11**</u> `b)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in \mathcal{P}(A)) \wedge (\alpha \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}))$.

`3:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$" und
aus `3`"$\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`5:` Aus `4`"$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `2`"$\alpha \in \mathcal{P}(A) \ldots$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(A)$.

`6:` Via **32-3(Def)** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(A) = \mathcal{P}_{\text{endl}} \cap \mathcal{P}(A)$.

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(A)$.

<u>Beweis **345-11**</u> `c)` `VS` gleich x endlich.

`1:` Aus `VS` gleich "x endlich"
folgt via **297-16**: $(x \in \mathcal{U}_{\#(x)}) \wedge (\#(x) \in \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \#(x) \in \mathbb{N}$"
folgt via **345-6**: $-1 + \#(x) < \#(x)$.

`3:` Aus `1`"$\ldots \#(x) \in \mathbb{N}$"
folgt via **162-2**: $(\#(x) = 0) \vee (-1 + \#(x) \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\#(x) = 0$.

`4:` Aus +**schola**"$-1 + 0 = -1$" und
aus `3.1.Fall`
folgt: $-1 + \#(x) = -1$.

`5.1:` Via **folk** gilt: $x \notin 0$.

`5.2:` Via **296-10(Def)** gilt: $\mathcal{U}_{-1} = 0$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $x \notin \mathcal{U}_{-1}$.

`7:` Aus `6` und
aus `4`
folgt: $x \notin \mathcal{U}_{-1+\#(x)}$.

`8:` Aus `1`"$x \in \mathcal{U}_{\#(x)} \ldots$" und
aus `7`"$x \notin \mathcal{U}_{-1+\#(x)}$"
folgt via **folk**: $x \in \mathcal{U}_{\#(x)} \setminus \mathcal{U}_{-1+\#(x)}$.

`3.2.Fall` $-1 + \#(x) \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `2`"$-1 + \#(x) < \#(x)$" und
aus `3.2.Fall`"$-1 + \#(x) \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-17**: $x \notin \mathcal{U}_{-1+\#(x)}$.

`5:` Aus `1`"$x \in \mathcal{U}_{\#(x)} \ldots$" und
aus `4`"$x \notin \mathcal{U}_{-1+\#(x)}$"
folgt via **folk**: $x \in \mathcal{U}_{\#(x)} \setminus \mathcal{U}_{-1+\#(x)}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \mathcal{U}_{\#(x)} \setminus \mathcal{U}_{-1+\#(x)}$.

<u>Beweis **345-11**</u> `de)` `VS` gleich $w \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$"
folgt via **32-3**: $(w \subseteq A) \wedge (w \text{ endlich})$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots w$ endlich"
folgt via **28-6**: w Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots w$ endlich"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $w \in \mathcal{U}_{\#(w)} \setminus \mathcal{U}_{-1+\#(w)}$.

`3:` Aus `1`"$w \subseteq A$" und
aus `2.1`"w Menge"
folgt via **folk**: $w \in \mathcal{P}(A)$.

`4.d):` Aus `3`"$w \in \mathcal{P}(A)$" und
aus `2.2`"$w \in \mathcal{U}_{\#(w)} \setminus \mathcal{U}_{-1+\#(w)}$"
folgt via **folk**: $w \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{\#(w)} \setminus \mathcal{U}_{-1+\#(w)})$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots w$ endlich"
folgt via **297-15**: $\#(w) \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus `5`"$\#(w) \in \mathbb{N}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = \#(w)$.

`7.1:` Aus `6`"$\ldots \Omega = \#(w)$" und
aus `5`
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

`7.2:` Aus `6`"$\ldots \Omega = \#(w)$" und
aus `4.d)`
folgt: $w \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$.

`8.e):` Aus `6`"$\exists \Omega \ldots$"
aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (w \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}))$.

□

345-12. Weitere Vorbereitungen.

345-12(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\, x$" *und* "$x \in E$" *und* "$\bigcup E$ *Funktion*"
folgt "$x(p) = (\bigcup E)(p)$".

b) *Aus* "R *ist* **ana1** *von* q, x" *und* "q *Menge*"
folgt "$0 \in \mathsf{dom}\,(R(0))$" *und* "$R(0)(0) = q$".

c) *Aus* "R *ist* **ana1** *von* $q, \Box$"
und "$\Box$ *Algebra in* A"
und "$1 \in \mathsf{dom}\, R$"
und "$p, q \in A$"
folgt "$R(1)(\{p\}) = q_{-}\Box_{-}p$".

d) *Aus* "R *ist* **ana1** *von* $q, \Box$"
und "$\Box$ *Algebra in* A"
und "$R(n), R(1+n)$ *Funktion*"
und "$p, q \in A$"
und "$E \in \mathsf{dom}\,(R(n))$"
und "$p \notin E$"
folgt $R(1+n)(\{p\} \cup E) = R(n)(E)_{-}\Box_{-}p$.

e) $0 \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0})$.

f) *Aus* "$a \in A$" *folgt* "$\{a\} \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_{-1+1})$".

g) *Aus* "$a \in A$" *und* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$a \notin E \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$"
folgt "$\{a\} \cup E \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+n)})$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **345-12**

$\mathsf{337.0}(x, y) \ = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$

<u>Beweis **345-12**</u> `a)` `VS` gleich $(p \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x \in E) \wedge (\bigcup E)$ Funktion).

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in E \ldots$"
folgt via **folk**: $x \subseteq \bigcup E$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x \ldots$",
aus `1` "$x \subseteq \bigcup E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \bigcup E$ Funktion"
folgt via **308-6**: $x(p) = (\bigcup E)(p)$.

`b)` `VS` gleich (R ist **ana1** von q, x) $\wedge$ (q Menge).

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`2.1:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots q$ Menge"
folgt via **259-37**: $0 \in \mathsf{dom}\,(\{(0, q)\})$.

`2.2:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots q$ Menge"
folgt via **259-37**: $\{(0, q)\}(0) = q$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `1`
folgt: $\boxed{0 \in \mathsf{dom}\,(R(0))}$

`3.2:` Aus `2.2` und
aus `1`
folgt: $\boxed{R(0)(0) = q}$

`c)`
`VS` gleich (R ist **ana1** von $q, \square$) $\wedge$ ($\square$ Algebra in A) $\wedge$ $(1 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (p, q \in A)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, \square \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 \in \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via **339-10**: $R(1) = 337.0(\{(0, q)\}, \square)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \square$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **93-6**: $\square$ Funktion.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

...

<u>Beweis **345-12**</u> `c)`
`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \Box) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (p, q \in A)$.

...

`2.1:` Via **259-36** gilt: $\{(0,q)\}$ Funktion.

`2.2:` Aus `1.2`“$\Box$ Funktion”
folgt via **339-10**: $\mathsf{337.0}(\{(0,q)\}, \Box)$ Funktion.

`2.3:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge” und
aus `1.3`“q Menge”
folgt via **259-37**: $\{(0,q)\}(0) = q$.

`2.4:` Via **folk** gilt: $p \notin 0$.

`3:` Aus `2.3` und
aus `VS` gleich “$\ldots q \in A$”
folgt: $\{(0,q)\}(0) \in A$.

`4:` Aus `2.1`“$\{(0,q)\}$ Funktion”,
aus `VS` gleich “$\ldots \Box$ Algebra in $A \ldots$”,
aus `2.2`“$\mathsf{337.0}(\{(0,q)\}, \Box)$ Funktion”,
aus `VS` gleich “$\ldots p \ldots \in A$”,
aus `3`“$\{(0,q)\}(0) \in A$” und
aus `2.4`“$p \notin 0$”
folgt via **342-4**: $\mathsf{337.0}(\{(0,q)\}, \Box)(\{p\} \cup 0) = \{(0,q)\}(0)\_\Box\_p$.

`5:` Aus `4` und
aus `1.1`
folgt: $R(1)(\{p\} \cup 0) = \{(0,q)\}(0)\_\Box\_p$.

`6:` Aus `5` und
aus `2.3`
folgt: $R(1)(\{p\} \cup 0) = q\_\Box\_p$.

`7:` Via **folk** gilt: $\{p\} \cup 0 = \{p\}$.

`8:` Aus `6` und
aus `7`
folgt: $R(1)(\{p\}) = q\_\Box\_p$.

<u>Beweis **345-12**</u> `d)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, \square) \wedge (\square \text{ Algebra in } A)$
$\wedge (R(n), R(1+n) \text{ Funktion})$
$\wedge (p, q \in A) \wedge (E \in \mathsf{dom}\,(R(n))) \wedge (p \notin E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots R(n), R(1+n)$ Funktion…"
folgt via **339-5**: $n, 1+n \in \mathsf{dom}\, R$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, \square \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \square$ Algebra in $A \ldots$",
aus `1`"$n \ldots \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \in A \ldots$"
folgt via **341-9**: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von $q, \square \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots R(n) \ldots$ Funktion…" und
aus `1`"$\ldots 1+n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **344-6**: $R(1+n) = \mathsf{337.0}(R(n), \square)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots R(n) \ldots$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathsf{dom}\,(R(n)) \ldots$"
folgt via **18-22**: $R(n)(E) \in \mathsf{ran}\,(R(n))$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots R(1+n)$ Funktion …" und
aus `2.2`
folgt: $\mathsf{337.0}(R(n), \square)$ Funktion.

`4:` Aus `3.1`"$R(n)(E) \in \mathsf{ran}\,(R(n))$" und
aus `2.1`"$\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$"
folgt via **folk**: $R(n)(E) \in A$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots R(n) \ldots$ Funktion",
aus →) "$\square$ Algebra in A",
aus `3.2`"$\mathsf{337.0}(R(n), \square)$ Funktion",
aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in A \ldots$",
aus `4`"$R(n)(E) \in A$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin E$"
folgt via **342-4**: $\mathsf{337.0}(R(n), \square)\,(\{p\} \cup E) = R(n)(E)_{\_}\square_{\_}p$.

`6:` Aus `5` und
aus `2.2`
folgt: $R(1+n)(\{p\} \cup E) = R(n)(E)_{\_}\square_{\_}p$.

<u>Beweis</u> **345-12** `e)`

`1.1:` Via **0-28** gilt: $0 \in \mathcal{P}(A)$.

`1.2:` Via **341-2** gilt: $\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1} = \{0\}$.

`2:` Aus **1-5**"$0 \in \{0\}$" und
aus `1.2`
folgt: $0 \in \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1}$.

`3:` Aus `2` und
aus +**schola**"$-1 + 0 = -1$"
folgt: $0 \in \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}$.

`f) VS` gleich $a \in A$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a \in A$"
folgt via **1-8**: $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$a \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: a Menge.

`2:` Aus `1.2`"a Menge"
folgt via **27-6**: $\{a\} \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

`3:` Aus `1.1`"$\{a\} \in \mathcal{P}(A)$" und
aus `2`"$\{a\} \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$"
folgt via **folk**: $\{a\} \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

`4:` Aus `3` und
aus **296-12**"$\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}} = \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$"
folgt: $\{a\} \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0)$.

`5:` Aus `4` und
aus +**schola**"$-1 + 1 = 0$"
folgt: $\{a\} \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_{-1+1})$.

Beweis **345-12** `g)` `VS` gleich $(a \in A) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (a \notin E \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a \in A \ldots$"
folgt via **1-8**: $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$"
folgt via **folk**: $(E \in \mathcal{P}(A)) \wedge (E \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$a \in A \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: a Menge.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **297-4**: $-1 + (1 + n) = n$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\{a\} \in \mathcal{P}(A)$" und
aus `1.2`"$E \in \mathcal{P}(A) \ldots$"
folgt via **341-2**: $\{a\} \cup E \in \mathcal{P}(A)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \notin E \ldots$",
aus `1.2`"$\ldots E \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$" und
aus `1.3`"a Menge"
folgt via **300-6**: $\{a\} \cup E \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `1.4`
folgt: $\{a\} \cup E \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+n)}$.

□

345-13. Nun soll der allgemeine Pfad verlassen und $q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box$ für Algebren $\Box$ auf A unter vertraut erscheinenden Zusatz-Bedingungen untersucht werden.

345-13(Satz) *Es gelte:*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) A *Menge.*

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf* A.

→) $q \in A$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

b) $\mathsf{ran}\,(q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box) \subseteq A$.

c) $q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box$ *Funktion.*

d) $q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box$ *Relation.*

e) $q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \to A$.

f) $\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}))$
$$\Rightarrow \qquad (q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\beta) = \mathtt{rf1}q\Box(\alpha)(\beta).$$

g) $(q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(0) = q$.

h) $\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow ((q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\{\alpha\}) = q\_\Box\_\alpha)$.

i) $\forall \alpha, \beta : (\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$
$$\Rightarrow \qquad (q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\{\alpha\} \cup \beta) = (q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\beta)\_\Box\_\alpha.$$

`ALG.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **345-13**</u>

1.1: Aus →) "□ Algebra in A",
aus →) "A Menge",
aus →) "□ tunnelt rechts auf A" und
aus →) "$q \in A$"
folgt via **344-14**: $\texttt{rf1}q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$.

1.2: Aus →) "□ Algebra in A",
aus →) "A Menge",
aus →) "□ tunnelt rechts auf A" und
aus →) "$q \in A$"
folgt via **344-14**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\texttt{rf1}q\Box(\alpha)\text{ Funktion})$.

1.3: Via **337-25** gilt: $\texttt{rf1}q\Box$ ist **ana1** von $q, \Box$.

1.4: Aus →) "$q \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

2: Aus 1.1 "$\texttt{rf1}\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\texttt{rf1}q\Box\text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,(\texttt{rf1}q\Box) = \mathbb{N})$.

...

<u>Beweis</u> **345-13** ...

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\gamma \in \mathsf{dom}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})$.

4: Aus Thema3.1 "$\gamma \in \mathsf{dom}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})$"
folgt via **345-10**:
$$\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \wedge (\gamma \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box(\Omega))).$$

5: Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus 1.3 "$\mathtt{rf1}q\Box$ ist **ana1** von $q, \Box$",
aus 4 "... $\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$ ..." und
aus →) "$q \in A$"
folgt via **341-9**:
$$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box(\Omega)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}).$$

6: Aus 4 "... $\gamma \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box(\Omega))$" und
aus 5
folgt: $\gamma \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$.

7: Aus 4 "... $\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$ ..." und
aus 2 "... $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box) = \mathbb{N}$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

8: Aus 7 "$\Omega \in \mathbb{N}$"
folgt via **345-11**: $\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

9: Aus 6 "$\gamma \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$" und
aus 8 "$\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$"
folgt via **folk**: $\gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

Ergo Thema3.1: $\forall\gamma : (\gamma \in \mathsf{dom}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})) \Rightarrow (\gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathsf{dom}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)\text{”}}$

...

<u>Beweis **345-13**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema3.2}}$ $\gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

4: Aus Thema3.2 "$\gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$"
folgt via **345-11**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\gamma \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})).$$

5: Aus 4 "$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus 2 "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square) = \mathbb{N}$"
folgt: $\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square)$.

6: Aus →) "$\square$ Algebra auf A",
aus 1.3 "$\mathtt{rf1}q\square$ ist **ana1** von $q, \square$",
aus 5 "$\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square)$" und
aus →) "$q \in A$"
folgt via **341-9**:
$$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square(\Omega)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}).$$

7: Aus 4 "$\ldots \gamma \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$" und
aus 6
folgt: $\gamma \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square(\Omega))$.

8: Aus 7 "$\gamma \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square(\Omega))$" und
aus 5 "$\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square)$"
folgt via **345-10**: $\gamma \in \mathsf{dom}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\square})$.

Ergo Thema3.2: $\forall \gamma : (\gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)) \Rightarrow (\gamma \in \mathsf{dom}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\square}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \mathsf{dom}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\square})\text{”}}$

4.a): Aus A1 gleich "$\mathsf{dom}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\square}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und
aus A2 gleich "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \subseteq \mathsf{dom}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\square})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\square}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

...

Beweis **345-13** ...

$\boxed{\texttt{Thema5}}$ $\gamma \in \mathsf{ran}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\square})$.

6: Aus Thema5 "$\gamma \in \mathsf{ran}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\square})$"
folgt via **345-10**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf1}qx)) \wedge (\gamma \in \mathsf{ran}\,(\texttt{rf1}q\square(\Omega))).$$

7: Aus →) "$\square$ Algebra in A",
aus 1.3 "$\texttt{rf1}q\square$ ist **ana1** von $q, \square$",
aus 6 "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf1}q\square) \ldots$" und
aus →) "$q \in A$"
folgt via **341-9**: $\mathsf{ran}\,(\texttt{rf1}q\square(\Omega)) \subseteq A$.

8: Aus 6 "$\ldots \gamma \in \mathsf{ran}\,(\texttt{rf1}q\square(\Omega))$" und
aus 7 "$\mathsf{ran}\,(\texttt{rf1}q\square(\Omega)) \subseteq A$"
folgt via **folk**: $\gamma \in A$.

Ergo Thema5: $\forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{ran}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\square})) \Rightarrow (\gamma \in A)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{Ab)} \mid \text{"}\mathsf{ran}\,(q, \overset{\mathsf{fin}}{\square}) \subseteq A\text{"}}$

...

Beweis **345-13** ...

$\boxed{\texttt{Thema6.1}}$ $\gamma \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$.

7: Aus 2"$\mathtt{rf1}q\Box$ Funktion..." und
aus Thema6.1"$\gamma \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$"
folgt via **18-24**:
$$\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \wedge (\gamma = \mathtt{rf1}q\Box(\Omega)).$$

8: Aus 7"$\ldots\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)\ldots$" und
aus 2"$\ldots\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box) = \mathbb{N}$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

9: Aus 8"$\Omega \in \mathbb{N}$" und
aus 1.2"$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf1}q\Box(\alpha)$ Funktion)"
folgt: $\mathtt{rf1}q\Box(\Omega)$ Funktion.

10: Aus 7"$\ldots\gamma = \mathtt{rf1}q\Box(\Omega)$" und
aus 9
folgt: γ Funktion.

Ergo Thema6.1: A3 | "$\forall\gamma : (\gamma \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \Rightarrow (\gamma$ Funktion)"

...

<u>Beweis</u> **345-13** ...

$\boxed{\texttt{Thema6.2}}$ $(\gamma, \delta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \wedge (\gamma \neq \delta)$.

7.1: Aus 2"$\mathtt{rf1}q\Box$ Funktion... " und
aus Thema6.2"$\gamma \ldots \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box) \ldots$"
folgt via **18-24**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \wedge (\gamma = \mathtt{rf1}q\Box(\Omega)).$$

7.2: Aus 2"$\mathtt{rf1}q\Box$ Funktion... " und
aus Thema6.2"$\ldots \delta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box) \ldots$"
folgt via **18-24**:
$$\exists \Phi : (\Phi \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \wedge (\delta = \mathtt{rf1}q\Box(\Phi)).$$

8.1: Aus 7.1"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box) \ldots$" und
aus 2"$\ldots \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box) = \mathbb{N}$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

8.2: Aus 7.2"$\ldots \Phi \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box) \ldots$" und
aus 2"$\ldots \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box) = \mathbb{N}$"
folgt: $\Phi \in \mathbb{N}$.

8.3: Aus 7.1"$\ldots \gamma = \mathtt{rf1}q\Box(\Omega)$",
aus 7.2"$\ldots \delta = \mathtt{rf1}q\Box(\Phi)$" und
aus Thema6.2"$\ldots \gamma \neq \delta$"
folgt: $\mathtt{rf1}q\Box(\Omega) \neq \mathtt{rf1}q\Box(\Phi)$.

8.4: Aus →)"$\Box$ Algebra in A",
aus 1.3"$\mathtt{rf1}q\Box$ ist **ana1** von $q, \Box$",
aus 7.1"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box) \ldots$" und
aus →)"$q \in A$"
folgt via **341-9**:
$$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box(\Omega)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}).$$

8.5: Aus →)"$\Box$ Algebra in A",
aus 1.3"$\mathtt{rf1}q\Box$ ist **ana1** von $q, \Box$",
aus 7.2"$\ldots \Phi \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box) \ldots$" und
aus →)"$q \in A$"
folgt via **341-9**:
$$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box(\Phi)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Phi \setminus \mathcal{U}_{-1+\Phi}).$$

...

...

Beweis **345-13** ...

$\boxed{\texttt{Thema6.2}}$ $(\gamma, \delta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \wedge (\gamma \neq \delta)$.

...

`9.1`: Aus `8.3`"$\mathtt{rf1}q\Box(\Omega) \neq \mathtt{rf1}q\Box(\Phi)$"
folgt via **94-10**: $\Omega \neq \Phi$.

`9.2`: Aus `7.1`
folgt: $\gamma = \mathtt{rf1}q\Box(\Omega)$.

`9.3`: Aus `7.2`
folgt: $\delta = \mathtt{rf1}q\Box(\Phi)$.

`10`: Aus `8.1`"$\Omega \in \mathbb{N}$",
aus `8.2`"$\Phi \in \mathbb{N}$" und
aus `9`"$\Omega \neq \Phi$"
folgt via **338-2**: $(\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}) \cap (\mathcal{U}_\Phi \setminus \mathcal{U}_{-1+\Phi}) = 0$.

`11`:
$$\begin{aligned}(\mathsf{dom}\,\gamma) \cap (\mathsf{dom}\,\delta) &\stackrel{9.2}{=} (\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box(\Omega))) \cap (\mathsf{dom}\,\delta)\\
&\stackrel{9.3}{=} (\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box(\Omega))) \cap (\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box(\Phi)))\\
&\stackrel{8.4}{=} (\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})) \cap (\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box(\Phi)))\\
&\stackrel{8.5}{=} (\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})) \cap (\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Phi \setminus \mathcal{U}_{-1+\Phi}))\\
&\stackrel{\mathbf{2-19}}{=} \mathcal{P}(A) \cap ((\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}) \cap (\mathcal{U}_\Phi \setminus \mathcal{U}_{-1+\Phi}))\\
&\stackrel{10}{=} \mathcal{P}(A) \cap 0\\
&\stackrel{\mathbf{folk}}{=} 0.\end{aligned}$$

Ergo `Thema6.2`:

`A4`	"$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \wedge (\gamma \neq \delta)) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\gamma) \cap (\mathsf{dom}\,\delta) = 0)$"

`7`: Aus `A3` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \Rightarrow (\gamma$ Funktion$)$" und
aus `A4` gleich "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)) \wedge (\gamma \neq \delta))$
$\Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\gamma) \cap (\mathsf{dom}\,\delta) = 0)$"
folgt via **18-40**: $\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$ Funktion.

`8.c)`: Aus `7`
folgt **p.def.**: $q,\!\overset{\mathsf{fin}}{\Box}$ Funktion.

...

Beweis **345-13** ...

9.d): Aus 8.c) "$q \overset{\mathsf{fin}}{,} \square$ Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: $q \overset{\mathsf{fin}}{,} \square$ Relation.

9.e): Aus 8.c) "$q \overset{\mathsf{fin}}{,} \square$ Funktion",
aus 4.a) "$\mathsf{dom}\,(q \overset{\mathsf{fin}}{,} \square) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$" und
aus Ab) gleich "$\mathsf{ran}\,(q \overset{\mathsf{fin}}{,} \square) \subseteq A$"
folgt via **21-1(Def)**: $q \overset{\mathsf{fin}}{,} \square : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \to A$.

$\boxed{\texttt{Thema10}}$ $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}))$

11: Aus 2"$\ldots \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square) = \mathbb{N}$" und
aus Thema10"$\alpha \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square)$.

12: Aus →) "$\square$ Algebra in A",
aus 1.3"$\mathtt{rf1}q\square$ ist **ana1** von $q, \square$",
aus 11"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square)$" und
aus →) "$q \in A$"
folgt via **341-9**: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square(\alpha)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})$.

13: Aus VS gleich "$\ldots \beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})$" und
aus 12
folgt: $\beta \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square(\alpha))$.

14: Aus 2"$\mathtt{rf1}q\square$ Funktion..." und
aus 11"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square)$"
folgt via **18-22**: $\mathtt{rf1}q\square(\alpha) \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\square)$.

15: Aus 13"$\beta \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\square(\alpha))$",
aus 14"$\mathtt{rf1}q\square(\alpha) \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\square)$" und
aus 7"$\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\square)$ Funktion"
folgt via **345-12**: $\mathtt{rf1}q\square(\alpha)(\beta) = (\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}q\square))(\beta)$.

16: Aus 15
folgt **p.def.**: $\mathtt{rf1}q\square(\alpha)(\beta) = (q \overset{\mathsf{fin}}{,} \square)\beta$.

17: Aus 16
folgt: $(q \overset{\mathsf{fin}}{,} \square)(\beta) = \mathtt{rf1}q\square(\alpha)(\beta)$.

Ergo Thema10:

Af) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})))$
$\Rightarrow ((q \overset{\mathsf{fin}}{,} \square)(\beta) = \mathtt{rf1}q\square(\alpha)(\beta))$"

<u>Beweis **345-13**</u> ...

11: Via **345-12** gilt: $0 \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0})$.

12: Aus $\in$**schola**“$0 \in \mathbb{N}$”,
aus 11“$0 \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0})$” und
aus Af)“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}))) \Rightarrow ((q \overset{\mathsf{fin}}{,} \Box)(\beta) = \mathtt{rf1}q\Box(\alpha)(\beta))$”
folgt: $(q \overset{\mathsf{fin}}{,} \Box)(0) = \mathtt{rf1}q\Box(0)(0)$.

13: Aus 1.3“$\mathtt{rf1}q\Box$ ist **ana1** von $q, \Box$” und
aus 1.4“q Menge”
folgt via **345-12**: $\mathtt{rf1}q\Box(0)(0) = q$.

14.g): Aus 12 und
aus 13
folgt: $(q \overset{\mathsf{fin}}{,} \Box)(0) = q$.

...

Beweis **345-13** . . .

`Thema15` $\gamma \in A$.

16: Aus `Thema15`"$\gamma \in A$"
folgt via **345-12**: $\{\gamma\} \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_{-1+1})$.

17: Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{N}$" und
aus 16"$\{\gamma\} \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_{-1+1})$" und
aus `Af)`"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})))$
$\Rightarrow ((q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta) = \mathtt{rf1}q\Box(\alpha)(\beta))$"
folgt: $(q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\gamma\}) = \mathtt{rf1}q\Box(1)(\{\gamma\})$.

18: Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{N}$" und
aus 2"$\ldots \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box) = \mathbb{N}$"
folgt: $1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$.

19: Aus 1.3"$\mathtt{rf1}q\Box$ ist **ana1** von $q, \Box$",
aus $\rightarrow$)"$\Box$ Algebra in A",
aus 18"$1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}q\Box)$",
aus `Thema15`"$\gamma \in A$" und
aus $\rightarrow$)"$q \in A$"
folgt via **345-12**: $\mathtt{rf1}q\Box(1)(\{\gamma\}) = q\_\Box\_\gamma$.

20: Aus 17 und
aus 19
folgt: $(q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\gamma\}) = q\_\Box\_\gamma$.

Ergo `Thema15`: $\forall \gamma : (\gamma \in A) \Rightarrow ((q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\gamma\}) = q\_\Box\_\gamma)$.

Konsequenz: `Ah)` "$\forall \alpha : (\alpha \in A) \Rightarrow ((q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\alpha\}) = q\_\Box\_\alpha)$"

. . .

Beweis **345-13** ...

`Thema16` $(\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A))$.

17: Aus Thema16"... $\delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$"
folgt via **345-11**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\delta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})).$$

18.1: Aus 17"... $\Omega \in \mathbb{N}$ ..." und
aus 17"... $\delta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$" und
aus Af)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})))$
$\Rightarrow ((q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta) = \mathtt{rf1}q\Box(\alpha)(\beta))$"
folgt: $(q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\delta) = \mathtt{rf1}q\Box(\Omega)(\delta)$.

18.2: Aus Thema16"$\gamma \in A$ ...",
aus 17"... $\Omega \in \mathbb{N}$ ...",
aus Thema16"... $\gamma \notin \delta$ ..." und
aus 17"... $\delta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$"
folgt via **345-12**: $\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+\Omega} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\Omega)})$.

18.3: Aus 17"... $\Omega \in \mathbb{N}$ ..."
folgt via **folk**: $1 + \Omega \in \mathbb{N}$.

18.4: Aus 17"... $\Omega \in \mathbb{N}$ ..." und
aus 1.2"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf1}q\Box(\alpha)$ Funktion)"
folgt: $\mathtt{rf1}q\Box(\Omega)$ Funktion.

18.5: Aus 17"... $\Omega \in \mathbb{N}$ ..." und
aus 2"... $\mathsf{dom}(\mathtt{rf1}q\Box) = \mathbb{N}$"
folgt: $\Omega \in \mathsf{dom}(\mathtt{rf1}q\Box)$.

19.1: Aus 18.3"$1 + \Omega \in \mathbb{N}$" und
aus 1.2"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf1}q\Box(\alpha)$ Funktion)"
folgt: $\mathtt{rf1}q\Box(1 + \Omega)$ Funktion.

19.2: Aus →)"$\Box$ Algebra in A",
aus 1.3"$\mathtt{rf1}q\Box$ ist **ana1** von $q, \Box$",
aus 18.5"$\Omega \in \mathsf{dom}(\mathtt{rf1}q\Box)$" und
aus →)"$q \in A$"
folgt via **341-9**:
$$\mathsf{dom}(\mathtt{rf1}q\Box(\Omega)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}).$$

...

...

Beweis **345-13** ...

$\boxed{\texttt{Thema16}}$ $(\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A))$.

...

20: Aus 17"$\ldots \delta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$" und
aus 19.2
folgt: $\delta \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf1}q\Box(\Omega))$.

21: Aus 1.3"$\texttt{rf1}q\Box$ ist **ana1** von $q, \Box$",
aus →)"$\Box$ Algebra in A",
aus 18.4"$\texttt{rf1}q\Box(\Omega)$ Funktion",
aus 19.1"$\texttt{rf1}q\Box(1+\Omega)$ Funktion",
aus Thema16"$\gamma \in A \ldots$",
aus →)"$q \in A$",
aus 20"$\delta \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf1}q\Box(\Omega))$" und
aus Thema16"$\ldots \gamma \notin \delta \ldots$"
folgt via **345-12**:
$$\texttt{rf1}q\Box(1+\Omega)(\{\gamma\} \cup \delta) = \texttt{rf1}q\Box(\Omega)(\delta)\_\Box\_\gamma.$$

22: Aus 18.3"$1 + \Omega \in \mathbb{N}$",
aus 18.2"$\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_{1+\Omega} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\Omega)})$" und
aus Af)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})))$
$\Rightarrow ((q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta) = \texttt{rf1}q\Box(\alpha)(\beta))$"
folgt: $(q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\gamma\} \cup \delta) = \texttt{rf1}q\Box(1+\Omega)(\{\gamma\} \cup \delta)$.

23.1: Aus 21 und
aus 22
folgt: $(q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\gamma\} \cup \delta) = \texttt{rf1}q\Box(\Omega)(\delta)\_\Box\_\gamma$.

23.2: Aus 17"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$",
aus 17"$\ldots \delta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$" und
aus Af)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})))$
$\Rightarrow ((q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\beta) = \texttt{rf1}q\Box(\alpha)(\beta))$"
folgt: $(q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\delta) = \texttt{rf1}q\Box(\Omega)(\delta)$.

24: Aus 23.1 und
aus 23.2
folgt: $(q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\{\gamma\} \cup \delta) = (q, \overset{\mathsf{fin}}{\Box})(\delta)\_\Box\_\gamma$.

...

<u>Beweis **345-13**</u> ...

Ergo `Thema16`:

$$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in A) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A))) \Rightarrow ((q, \overset{\text{fin}}{\Box})(\{\gamma\} \cup \delta) = (q, \overset{\text{fin}}{\Box})(\delta)_{-}\Box_{-}\gamma).$$

Konsequenz:

`Ai)`	"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in A) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(A))) \Rightarrow ((q, \overset{\text{fin}}{\Box})(\{\alpha\} \cup \beta) = (q, \overset{\text{fin}}{\Box})(\beta)_{-}\Box_{-}\alpha)$"

$\square$

Maßtheorie: $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$. Mengenring.

Ersterstellung: 19/06/15 **Letzte Änderung: 22/06/15**

346-1. Was zeichnet die Addition (in $[0| + \infty]$) dermaßen aus, daß am allerhäufigsten "additive Mengen-Funktionen" betrachtet werden? Und wieso wird nicht auch die Multiplikation - zumindest im Ansatz - unter dem gleichen Aspekt einer "Mengen-Funktion" angesehen? Diese Fragen sollen als Leitmotiv dem ersten Essay zur Maßtheorie bei Seite stehen. Zunächst soll ein "$\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$" definiert werden. Die Untersuchungen zielen dann auf $x = \mathsf{A}$ - zurück zu Additivem - und - deutlich weniger intensiv - auf $x = \mathsf{M}$ ab.

346-1(Definition)

"**ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$**" genau dann, wenn gilt:

`e.1)` ϕ Funktion.

`e.2)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0))$
$$\Rightarrow (\phi(\alpha \cup \beta) = \phi(\alpha)\_\Box\_\phi(\beta)).$$

`ALG`-**Notation**.

346-2. Nicht ganz unerwartet ist es ratsam, die Liste der Formeln der Mengenlehre zu erweitern.

346-2(Satz)

a) $(x \cap y^C) \cap (x \cap y) = 0$.

b) $(x \cap y^C) \cup (x \cap y) = x$.

c) $x \cap (x \cap y^C)^C = x \cap y$.

d) zo *Funktion.*

e) $\mathrm{dom}\,\mathrm{zo} = \mathcal{U}$.

f) $\mathrm{ran}\,\mathrm{zo} = \{0\}$.

g) "$\mathrm{zo}(p) = 0$" *genau dann, wenn* "*p Menge*".

<u>Beweis</u> **346-2** `a)`

$$(x\cap y^C)\cap(x\cap y)\stackrel{\mathbf{2-19}}{=}x\cap(y^C\cap y)\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=}x\cap(y\cap y^C)\stackrel{\mathbf{3-6}}{=}x\cap 0\stackrel{\mathbf{folk}}{=}0.$$

`b)`

$$(x\cap y^C)\cup(x\cap y)\stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=}x\cap(y^C\cup y)\stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=}x\cap(y\cup y^C)\stackrel{\mathbf{3-6}}{=}x\cap\mathcal{U}\stackrel{\mathbf{folk}}{=}x.$$

`c)`

$$x\cap(x\cap y^C)^C\stackrel{\mathbf{DM}\cap\cup}{=}x\cap(x^C\cup(y^C)^C)\stackrel{\mathbf{3-4}}{=}x\cap(x^C\cup y)$$
$$\stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=}(x\cap x^C)\cup(x\cap y)\stackrel{\mathbf{folk}}{=}0\cup(x\cap y)\stackrel{\mathbf{folk}}{=}x\cap y.$$

`def)`

`1.1:` Via **21-13** gilt: $\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}:\mathcal{U}\to\{0\}$.

`1.2:` Aus **0-18**“$0\neq\mathcal{U}$”
folgt via **20-5**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_{\mathcal{U}})=\{0\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus **20-1(Def)**“$\mathsf{zo}=\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$”
folgt: $\mathsf{zo}:\mathcal{U}\to\{0\}$.

`3.d):` Aus 2“$\mathsf{zo}:\mathcal{U}\to\{0\}$”
folgt via **21-1(Def)**: zo Funktion.

`3.e):` Aus 2“$\mathsf{zo}:\mathcal{U}\to\{0\}$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,\mathsf{zo}=\mathcal{U}$.

`3.f):` Aus `1.2` und
aus **20-1(Def)**“$\mathsf{zo}=\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$”
folgt: $\mathsf{ran}\,\mathsf{zo}=\{0\}$.

□

`g)`

`1:` Via **20-5** gilt: $(\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}(p)=0)\Leftrightarrow(p\in\mathcal{U})$.

`2:` Aus `1` und
aus **20-1(Def)**“$\mathsf{zo}=\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$”
folgt: $(\mathsf{zo}(p)=0)\Leftrightarrow(p\in\mathcal{U})$.

`3:` Via **0-22** gilt: $(p\in\mathcal{U})\Leftrightarrow(p$ Menge$)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $(\mathsf{zo}(p)=0)\Leftrightarrow(p$ Menge$)$.

□

346-3. Jedes $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$ hat einige weitere, ansprechende Eigenschaften. Insbesondere die deduzierten "algebraischen" Eigenschaften `abcd)` von x scheinen interessant. Die Klasse A von `d)` muss kein Element von $\mathfrak{M}$ sein. Die Klasse B von `e)` muss weder Element von $\mathfrak{M}$ noch eine Menge sein. Die Zusatzbedingungen "$A \cup B \in \mathfrak{M}$" in `c)` und "$A \cap B^C \in \mathfrak{M}$" in `f)` (oder "$A^C \cap B$" in `g)` oder "$A \cap B^C, A^C \cap B \in \mathfrak{M}$" in `h)`) motivieren, sich in weiterer Folge mit "Mengenringen" zu beschäftigen.

346-3(Satz)

Aus "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$ und ...

`a)` *... und* "$0, A \in \mathfrak{M}$" *folgt* "$\phi(A) = \phi(A)\_\square\_\phi(0) = \phi(0)\_\square\_\phi(A)$".

`b)` *... und* "$0 \in \mathfrak{M} \cap \mathsf{dom}\,\phi$" *folgt* "$\phi(0)$ *ist* $\square$*neutral auf* $\phi[\mathfrak{M}]$".

`c)` *... und* "$A, B, A \cup B \in \mathfrak{M}$" *und* "$A \cap B = 0$"
folgt "$\phi(A)\_\square\_\phi(B) = \phi(B)\_\square\_\phi(A)$".

`d)` *... und* "$A \cup B, A \cap B^C, B \in \mathfrak{M}$"
folgt "$\phi(A \cup B) = \phi(A \cap B^C)\_\square\_\phi(B)$".

`e)` *... und* "$A, A \cap B, A \cap B^C \in \mathfrak{M}$"
folgt "$\phi(A) = \phi(A \cap B)\_\square\_\phi(A \cap B^C)$"
und "$\phi(A) = \phi(A \cap B^C)\_\square\_\phi(A \cap B)$"
und "$\phi(A \cap B)\_\square\_\phi(A \cap B^C) = \phi(A \cap B^C)\_\square\_\phi(A \cap B)$".

`f)` *... und* "$A, A \cup B \in \mathfrak{M}$"
und "$B, A \cap B, A \cap B^C \in \mathfrak{M} \cap \mathsf{dom}\,\phi$"
und "$\square$ *assoziativ auf* $\phi[\mathfrak{M}]$"
folgt "$\phi(A)\_\square\_\phi(B) = \phi(A \cap B)\_\square\_\phi(A \cup B)$".

`g)` *... und* "$B, A \cup B \in \mathfrak{M}$"
und "$A, A \cap B, A^C \cap B \in \mathfrak{M} \cap \mathsf{dom}\,\phi$"
und "$\square$ *assoziativ auf* $\phi[\mathfrak{M}]$"
folgt "$\phi(B)\_\square\_\phi(A) = \phi(A \cap B)\_\square\_\phi(A \cup B)$".

`h)` *... und* "$A \cup B \in \mathfrak{M}$"
und "$A, B, A \cap B, A \cap B^C, A^C \cap B \in \mathfrak{M} \cap \mathsf{dom}\,\phi$"
und "$\square$ *assoziativ auf* $\phi[\mathfrak{M}]$"
folgt "$\phi(A)\_\square\_\phi(B) = \phi(B)\_\square\_\phi(A)$".

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **346-3**</u> `a)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\_\text{Gewicht auf } \mathfrak{M}) \wedge (0, A \in \mathfrak{M})$.

`1.1:` Via **folk** gilt: $A \cap 0 = 0 \cap A = 0$.

`1.2:` Via **folk** gilt: $A \cup 0 = 0 \cup A = A$.

`2.1:` Aus `1.2`"$A \cup 0 = \ldots = A$" und
aus `3`"$\ldots A \in \mathfrak{M} \ldots$"
folgt: $A \cup 0 \in \mathfrak{M}$.

`2.2:` Aus `4.2`"$\ldots 0 \cup A = A$" und
aus `3`"$\ldots A \in \mathfrak{M} \ldots$"
folgt: $0 \cup A \in \mathfrak{M}$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A \in \mathfrak{M} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \ldots \in \mathfrak{M}$",
aus `2.1`"$A \cup 0 \in \mathfrak{M}$" und
aus `1.1`"$A \cap 0 = \ldots = 0$"
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(A \cup 0) = \phi(A)\_\Box\_\phi(0)$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0, A \in \mathfrak{M}$",
aus `2.2`"$0 \cup A \in \mathfrak{M}$" und
aus `4.1`"$\ldots 0 \cap A = 0$"
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(0 \cup A) = \phi(0)\_\Box\_\phi(A)$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `1.2`"$A \cup 0 = \ldots = A$"
folgt: $\phi(A) = \phi(A)\_\Box\_\phi(0)$.

`4.2:` Aus `3.2` und
aus `1.2`"$\ldots 0 \cup A = A$"
folgt: $\phi(A) = \phi(0)\_\Box\_\phi(A)$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $\phi(A) = \phi(A)\_\Box\_\phi(0) = \phi(0)\_\Box\_\phi(A)$.

<u>Beweis **346-3**</u> `b)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \square\_\text{Gewicht auf } \mathfrak{M}) \wedge (0 \in \mathfrak{M} \cap \mathsf{dom}\,\phi)$.

`1:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{M}\ldots$"
folgt via **346-1(Def)**: ϕ Funktion.

`2.1:` Aus `1`"ϕ Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \in \mathfrak{M} \cap \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **18-27**: $\phi(0) \in \phi[\mathfrak{M}]$.

`Thema2.2` $\alpha \in \phi[\mathfrak{M}]$

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \in \mathfrak{M} \cap \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $0 \in \mathfrak{M}$.

`3.2:` Aus `1`"ϕ Funktion" und
aus `Thema2.2`"$\alpha \in \phi[\mathfrak{M}]$"
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha = \phi(\Omega))$.

`4:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{M}\ldots$" und
aus `3.1`"$\ldots 0 \in \mathfrak{M}$" und
aus `3.2`"$\ldots \Omega \in \mathfrak{M}\ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`):
$\phi(\Omega) = \phi(\Omega)\_\square\_\phi(0) = \phi(0)\_\square\_\phi(\Omega)$.

`5:` Aus `4`"$\phi(\Omega) = \phi(\Omega)\_\square\_\phi(0) = \phi(0)\_\square\_\phi(\Omega)$" und
aus `3.2`"$\ldots \alpha = \phi(\Omega)$"
folgt: $\alpha = \alpha\_\square\_\phi(0) = \phi(0)\_\square\_\alpha$.

`6:` Aus `5`
folgt: $\alpha\_\square\_\phi(0) = \phi(0)\_\square\_\alpha = \alpha$.

Ergo `Thema2.2`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \phi[\mathfrak{M}]) \Rightarrow (\alpha\_\square\_\phi(0) = \phi(0)\_\square\_\alpha = \alpha)$"

`3:` Aus `2.1`"$\phi(0) \in \phi[\mathfrak{M}]$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \phi[\mathfrak{M}]) \Rightarrow (\alpha\_\square\_\phi(0) = \phi(0)\_\square\_\alpha = \alpha)$"
folgt via **208-1(Def)**: $\phi(0)$ ist $\square$neutral auf $\phi[\mathfrak{M}]$.

<u>Beweis **346-3**</u> `c)`

`VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\text{\_Gewicht auf } \mathfrak{M}) \wedge (A, B, A \cup B \in \mathfrak{M}) \wedge (A \cap B = 0).$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(\phi \text{ ist } \Box\text{\_Gewicht auf } \mathfrak{M}) \wedge (A, B \in \mathfrak{M}) \wedge (A \cap B = 0)$"
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(A \cup B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B).$

`1.2:` Via **AG**$\cup$ gilt: $B \cup A = A \cup B.$

`1.3:` Via **AG**$\cap$ gilt: $B \cap A = A \cap B.$

`2.1:` Aus `1.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots A \cup B \in \mathfrak{M} \ldots$"
folgt: $B \cup A \in \mathfrak{M}.$

`2.2:` Aus `1.3` und
aus `VS` gleich "$\ldots A \cap B = 0$"
folgt: $B \cap A = 0.$

`3:` Aus `VS` gleich "$\phi \text{ ist } \Box\text{\_Gewicht auf } \mathfrak{M} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots B \in \mathfrak{M} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A \ldots \in \mathfrak{M} \ldots$",
aus `2.1`"$B \cup A \in \mathfrak{M}$" und
aus `2.2`"$B \cap A = 0$"
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(B \cup A) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A).$

`4:` Aus `3` und
aus `1.2`
folgt: $\phi(A \cup B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A).$

`5:` Aus `1.1` und
aus `4`
folgt: $\phi(A)\_\Box\_\phi(B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A).$

<u>Beweis</u> **346-3** `d)` `VS` gleich (ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$) $\wedge$ ($A \cup B, A \cap B^C, B \in \mathfrak{M}$).

`1.1:` $(A \cap B^C) \cup B \stackrel{\mathbf{DG}\cup\cap}{=} (A \cup B) \cap (B^C \cup B) \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} (A \cup B) \cap (B \cup B^C)$
$\stackrel{\mathbf{3-6}}{=} (A \cup B) \cap \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{folk}}{=} A \cup B.$

`1.2:` $(A \cap B^C) \cap B \stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} A \cap (B^C \cap B) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} A \cap (B \cap B^C) \stackrel{\mathbf{3-6}}{=} A \cap 0 \stackrel{\mathbf{folk}}{=} 0.$

`2:` Aus `1.1` "$(A \cap B^C) \cup B = \ldots = A \cup B$" und
aus `VS` gleich "$\ldots A \cup B \in \mathfrak{M} \ldots$"
folgt: $(A \cap B^C) \cup B \in \mathfrak{M}$.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A \cap B^C, B \ldots \in \mathfrak{M}$",
aus `2` "$(A \cap B^C) \cup B \in \mathfrak{M}$" und
aus `1.2` "$(A \cap B^C) \cap B = \ldots = 0$"
folgt via **346-1(Def)** $\phi((A \cap B^C) \cup B) = \phi(A \cap B^C)\_\Box\_\phi(B)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.1` "$(A \cap B^C) \cup B = \ldots = A \cup B$"
folgt: $\phi(A \cup B) = \phi(A \cap B^C)\_\Box\_\phi(B)$.

<u>Beweis</u> **346-3** `e)` `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \Box\text{\_Gewicht auf } \mathfrak{M}) \wedge (A, A \cap B, A \cap B^C \in \mathfrak{M})$.

`1.1:` Via **346-2** gilt: $(A \cap B^C) \cup (A \cap B) = A.$

`1.2:` Via **346-2** gilt: $(A \cap B^C) \cap (A \cap B) = 0.$

`2:` Aus `1.1` und
aus `VS` gleich "$\ldots A \ldots \in \mathfrak{M}$"
folgt: $(A \cap B^C) \cup (A \cap B) \in \mathfrak{M}.$

`3.1:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A \cap B^C \in \mathfrak{M}$",
aus `VS` gleich "$\ldots A \cap B \ldots \in \mathfrak{M}$",
aus `2`"$(A \cap B^C) \cup (A \cap B) \in \mathfrak{M}$" und
aus `1.2`"$(A \cap B^C) \cap (A \cap B) = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:

$$\phi(A \cap B^C)\_\Box\_\phi(A \cap B) = \phi(A \cap B)\_\Box\_\phi(A \cap B^C).$$

`3.2:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A \cap B^C \in \mathfrak{M}$",
aus `VS` gleich "$\ldots A \cap B \ldots \in \mathfrak{M}$",
aus `2`"$(A \cap B^C) \cup (A \cap B) \in \mathfrak{M}$" und
aus `1.2`"$(A \cap B^C) \cap (A \cap B) = 0$"
folgt via **346-1(Def)**:

$$\phi((A \cap B^C) \cup (A \cap B)) = \phi(A \cap B^C)\_\Box\_\phi(A \cap B).$$

`4.1:` Aus `3.1`
folgt:

$$\boxed{\phi(A \cap B)\_\Box\_\phi(A \cap B^C) = \phi(A \cap B^C)\_\Box\_\phi(A \cap B)}$$

`4.2:` Aus `3.2` und
aus `1.1`
folgt:

$$\boxed{\phi(A) = \phi(A \cap B^C)\_\Box\_\phi(A \cap B)}$$

`5:` Aus `4.2` und
aus `4.1`
folgt:

$$\boxed{\phi(A) = \phi(A \cap B)\_\Box\_\phi(A \cap B^C)}$$

<u>Beweis **346-3**</u> `f)` `VS` gleich (ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$)
$\wedge(A, A\cup B\in\mathfrak{M})\wedge(B, A\cap B, A\cap B^C\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi)\wedge(\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathfrak{M}])$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}\ldots$"
folgt via **346-1(Def)**: ϕ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots B, A\cap B, A\cap B^C\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi\ldots$"
folgt via **folk**: $B, A\cap B, A\cap B^C\in\mathfrak{M}$.

`2.1:` Aus `1.1`"ϕ Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots B, A\cap B, A\cap B^C\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **18-27**: $\phi(B), \phi(A\cap B), \phi(A\cap B^C)\in\phi[\mathfrak{M}]$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A\ldots\in\mathfrak{M}\ldots$",
aus `1.2`"$\ldots A\cap B^C\in\mathfrak{M}$" und
aus `1.2`"$\ldots A\cap B\ldots\in\mathfrak{M}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\phi(A)=\phi(A\cap B)\_\Box\_\phi(A\cap B^C)$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A\cup B\in\mathfrak{M}\ldots$",
aus `1.2`"$\ldots A\cap B^C\in\mathfrak{M}$" und
aus `1.2`"$B\ldots\in\mathfrak{M}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\phi(A\cup B)=\phi(A\cap B^C)\_\Box\_\phi(B)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathfrak{M}]$",
aus `2.1`"$\ldots\phi(A\cap B), \phi(A\cap B^C)\in\phi[\mathfrak{M}]$" und
aus `2.1`"$\phi(B)\ldots\in\mathfrak{M}$"
folgt via **211-1(Def)**:

$$\phi(A\cap B)\_\Box\_(\phi(A\cap B^C)\_\Box\_\phi(B))=(\phi(A\cap B)\_\Box\_\phi(A\cap B^C))\_\Box\_\phi(B).$$

`4:` $\phi(A)\_\Box\_\phi(B)\stackrel{2.2}{=}(\phi(A\cap B)\_\Box\_\phi(A\cap B^C))\_\Box\_\phi(B)$
$\stackrel{3}{=}\phi(A\cap B)\_\Box\_(\phi(A\cap B^C)\_\Box\_\phi(B))\stackrel{2.3}{=}\phi(A\cap B)\_\Box\_\phi(A\cup B)$.

Beweis **346-3** `g)` `VS` gleich (ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$)
$\wedge(B, A\cup B\in\mathfrak{M})\wedge(A, A\cap B, A^C\cap B\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi)\wedge(\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathfrak{M}])$.

`1.1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $B\cup A=A\cup B$.

`1.2:` Via **KG**$\cap$ gilt: $B\cap A=A\cap B$.

`1.3:` Via **KG**$\cap$ gilt: $B\cap A^C=A^C\cap B$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `VS` gleich "$\ldots A\cup B\in\mathfrak{M}\ldots$"
folgt: $B\cup A\in\mathfrak{M}$.

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots A\cap B\ldots\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi\ldots$"
folgt: $B\cap A\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi$.

`2.3:` Aus `1.3` und
aus `VS` gleich "$\ldots A^C\cap B\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi\ldots$"
folgt: $B\cap A^C\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi$.

`2:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots B\ldots\in\mathfrak{M}$",
aus `2.1`"$B\cup A\in\mathfrak{M}$",
aus `VS` gleich "$\ldots A\ldots\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi$",
aus `2.2`"$B\cap A\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi$",
aus `2.3`"$B\cap A^C\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi$" und
aus `VS` gleich "$\ldots\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathfrak{M}]$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`:
$$\phi(B)\_\Box\_\phi(A)=\phi(B\cap A)\_\Box\_\phi(B\cup A).$$

`3:` Aus `2`,
aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\phi(B)\_\Box\_\phi(A)=\phi(A\cap B)\_\Box\_\phi(A\cup B)$.

<u>Beweis **346-3**</u> `h)` `VS` gleich (ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$)

$\wedge(A\cup B\in\mathfrak{M})\wedge(A,B,A\cap B,A\cap B^C,A^C\cap B\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi)$

$\wedge(\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathfrak{M}])$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots A\ldots\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi\ldots$"
folgt via **folk**: $A\in\mathfrak{M}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots B\ldots\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi\ldots$"
folgt via **folk**: $B\in\mathfrak{M}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}\ldots$",
aus `1.1`"$A\in\mathfrak{M}$",
aus `VS` gleich "$\ldots A\cup B\in\mathfrak{M}\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots B,A\cap B,A\cap B^C\ldots\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathfrak{M}]$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`:

$$\phi(A)\_\Box\_\phi(B)=\phi(A\cap B)\_\Box\_\phi(A\cup B).$$

`2.2:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{M}\ldots$",
aus `1.2`"$B\in\mathfrak{M}$",
aus `VS` gleich "$\ldots A\cup B\in\mathfrak{M}\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A\ldots\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A\cap B\ldots\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A^C\cap B\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{dom}\,\phi\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathfrak{M}]$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`:

$$\phi(B)\_\Box\_\phi(A)=\phi(A\cap B)\_\Box\_\phi(A\cup B).$$

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.1`
folgt: $\phi(A)\_\Box\_\phi(B)=\phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

$\Box$

346-4. □_Gewichte werden gerne auf Klassen $\mathfrak{M}$ mit gewissen Eigenschaften betrachtet,

346-4(Definition)

"$\mathfrak{R}$ **Mengenring**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathfrak{R}) \Rightarrow (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathfrak{R}).$$

346-5. Es gibt sechs - nicht notwendiger Weise verschiedene - Standard-Beispiele von Mengenringen.

346-5(Satz)

- `a)` 0 *Mengenring.*
- `b)` $\{0\}$ *Mengenring.*
- `c)` $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$ *Mengenring.*
- `d)` $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$ *Mengenring.*
- `e)` $\mathcal{P}(x)$ *Mengenring.*
- `f)` $\mathcal{U}$ *Mengenring.*

Beweis **346-5** `a)`

`Thema0` $\alpha, \beta \in 0.$

`1:` Via **folk** gilt: $\alpha \notin 0.$

`2:` Nach `Thema0` gilt: $\alpha \in 0.$

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in 0) \Rightarrow (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in 0).$

Konsequenz via **346-4(Def)**: 0 Mengenring.

Beweis **346-5** `b)`

`Thema0` $\alpha, \beta \in \{0\}$.

`1:` Aus `Thema0`“$\alpha \ldots \in \{0\}$”
folgt via **folk**: $\alpha = 0$.

`2.1:` $\alpha \cup \beta \stackrel{1}{=} 0 \cup \beta \stackrel{\text{folk}}{=} \beta$.

`2.2:` $\alpha \cap \beta^C \stackrel{1}{=} 0 \cap \beta^C \stackrel{\text{folk}}{=} 0 \stackrel{1}{=} \alpha$.

`3.1:` Aus `2.1`“$\alpha \cup \beta = \ldots = \beta$” und
aus `Thema0`“$\ldots \beta \in \{0\}$”
folgt: $\alpha \cup \beta \in \{0\}$.

`3.2:` Aus `2.2`“$\alpha \cap \beta^C = \ldots = \alpha$” und
aus `Thema0`“$\alpha \ldots \in \{0\}$”
folgt: $\alpha \cap \beta^C \in \{0\}$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \{0\}$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \{0\}) \Rightarrow (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \{0\})$.

Konsequenz via **346-4(Def)**: $\{0\}$ Mengenring.

`c)`

`Thema0` $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`1.1:` Aus `Thema0`“$\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$”
folgt via **32-5**: $\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\alpha \ldots \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$”
folgt via **32-5**: $\alpha \cap \beta^C \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x))$.

Konsequenz via **346-4(Def)**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$ Mengenring.

<u>Beweis **346-5**</u> `d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U})$ Mengenring.

`2:` Aus `1` und
aus **32-7**“$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathcal{U}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$”
folgt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$ Mengenring.

`e)`

`Thema0` $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(x)$.

`1.1:` Aus `Thema0`“$\alpha, \beta \in \mathcal{P}(x)$”
folgt via **341-2**: $\alpha \cup \beta \in \mathcal{P}(x)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\alpha \ldots \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$”
folgt via **2-27**: $\alpha \cap \beta^C \in \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathcal{P}(x)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}(x)) \Rightarrow (\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta^C \in \mathcal{P}(x))$.

Konsequenz via **346-4(Def)**: $\mathcal{P}(x)$ Mengenring.

`f)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ Mengenring.

`2:` Aus `1` und
aus **0-28**“$\mathcal{P}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$”
folgt: $\mathcal{U}$ Mengenring.

□

346-6. Mengenringe sind gegenüber der elementaren Klassen-Algebra abgeschlossen.

346-6(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\mathfrak{R}$ *Mengenring.*

$\rightarrow\!)$ $A, B \in \mathfrak{R}$.

Dann folgt:

a) $0 \in \mathfrak{R}$.

b) $A^C \cap B, A \cap B^C \in \mathfrak{R}$.

c) $A \cup B, B \cup A \in \mathfrak{R}$.

d) $A \cap B, B \cap A \in \mathfrak{R}$.

e) $A \setminus B, B \setminus A \in \mathfrak{R}$.

f) $A \Delta B, B \Delta A \in \mathfrak{R}$.

Beweis **346-6** a)

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$\mathfrak{R}$ Mengenring",
aus $\rightarrow\!)$ "$A \ldots \in \mathfrak{R}$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$A \ldots \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-4(Def)**: $A \cap A^C \in \mathfrak{R}$.

2: Via **folk** gilt: $A \cap A^C = 0$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $0 \in \mathfrak{R}$.

<u>Beweis</u> **346-6** `b)`

`1.1:` Aus →) “$\mathfrak{R}$ Mengenring” und
aus →) “$A, B \in \mathfrak{R}$”

folgt via **364-4(Def)**: $\boxed{A \cap B^C \in \mathfrak{R}}$

`1.2:` Aus →) “$\mathfrak{R}$ Mengenring”,
aus →) “$\ldots B \in \mathfrak{R}$” und
aus →) “$A \ldots \in \mathfrak{R}$”
folgt via **346-4(Def)**: $B \cap A^C \in \mathfrak{R}$.

`2:` Via **KG**$\cap$ gilt: $A^C \cap B = B \cap A^C$.

`3:` Aus `1.2` und
aus `2`

folgt: $\boxed{A^C \cap B \in \mathfrak{R}}$

`c)`

`1:` Aus →) “$\mathfrak{R}$ Mengenring” und
aus →) “$A, B \in \mathfrak{R}$”

folgt via **346-4(Def)**: $\boxed{A \cup B \in \mathfrak{R}}$

`2:` Via **KG**$\cup$ gilt: $B \cup A = A \cup B$.

`3:` Aus `2` und
aus `1`

folgt: $\boxed{B \cup A \in \mathfrak{R}}$

<u>Beweis **346-6** `d)`</u>

`1:` Aus $\rightarrow\!\!)$ “$\mathfrak{R}$ Mengenring” und
aus $\rightarrow\!\!)$ “$A, B \in \mathfrak{R}$”
folgt via **346-4(Def)**: $A \cap B^C \in \mathfrak{R}$.

`2:` Aus $\rightarrow\!\!)$ “$\mathfrak{R}$ Mengenring”,
aus $\rightarrow\!\!)$ “$A \ldots \in \mathfrak{R}$” und
aus `1` “$A \cap B^C \in \mathfrak{R}$”
folgt via **346-4(Def)**: $A \cap (A \cap B^C)^C \in \mathfrak{R}$.

`3:` Via **346-2** gilt: $A \cap (A \cap B^C)^C = A \cap B$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\boxed{A \cap B \in \mathfrak{R}}$

`5:` Via **KG**$\cap$ gilt: $B \cap A = A \cap B$.

`6:` Aus `5` und
aus `4`
folgt: $\boxed{B \cap A \in \mathfrak{R}}$

<u>Beweis **346-6** `e)`</u>

`1.1:` Aus →) “$\mathfrak{R}$ Mengenring” und
aus →) “$A, B \in \mathfrak{R}$”
folgt via **346-4(Def)**: $A \cap B^C \in \mathfrak{R}$.

`1.2:` Aus →) “$\mathfrak{R}$ Mengenring”,
aus →) “$\ldots B \in \mathfrak{R}$” und
aus →) “$A \ldots \in \mathfrak{R}$”
folgt via **346-4(Def)**: $B \cap A^C \in \mathfrak{R}$.

`2.1:` Via **5-10** gilt: $A \setminus B = A \cap B^C$.

`2.2:` Via **5-10** gilt: $B \setminus A = B \cap A^C$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `1.1`
folgt: $\boxed{A \setminus B \in \mathfrak{R}}$

`3.2:` Aus `2.2` und
aus `1.2`
folgt: $\boxed{B \setminus A \in \mathfrak{R}}$

<u>Beweis</u> **346-6** `f)`

`1:` Aus →) “$\mathfrak{R}$ Mengenring” und
aus →) “$A, B \in \mathfrak{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $A \setminus B, B \setminus A \in \mathfrak{R}$.

`2:` Aus →) “$\mathfrak{R}$ Mengenring” und
aus `1` “$A \setminus B, B \setminus A \in \mathfrak{R}$”
folgt via **346-4(Def)**: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathfrak{R}$.

`3:` Via **5-27** gilt: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $\boxed{A \Delta B \in \mathfrak{R}}$

`5:` Via **FS**Δ gilt: $B \Delta A = A \Delta B$.

`6:` Aus `5` und
aus `4`
folgt: $\boxed{B \Delta A \in \mathfrak{R}}$

□

346-7. Ein Mengenring ist entweder leer oder er enthält die leere Menge.

346-7(Satz)

a) *Aus* “$0 \neq \mathfrak{R}$ *Mengenring*” *folgt* “$0 \in \mathfrak{R}$”.

b) *Aus* “$\mathfrak{R}$ *Mengenring*” *folgt* “$(\mathfrak{R} = 0) \vee (0 \in \mathfrak{R})$”.

Beweis **346-7** a) VS gleich $0 \neq \mathfrak{R}$ Mengenring.

1: Aus VS gleich “$0 \neq \mathfrak{R} \ldots$”
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathfrak{R}$.

2: Aus VS gleich “$\ldots \mathfrak{R}$ Mengenring”,
aus 1“$\ldots \Omega \in \mathfrak{R}$” und
aus 1“$\ldots \Omega \in \mathfrak{R}$”
folgt via **346-6**: $0 \in \mathfrak{R}$.

b) VS gleich $\mathfrak{R}$ Mengenring.

1: Es gilt: $(\mathfrak{R} = 0) \vee (0 \neq \mathfrak{R})$.
Fallunterscheidung

1.1.Fall $\mathfrak{R} = 0$.

1.2.Fall $0 \neq \mathfrak{R}$.
Aus VS gleich “$\mathfrak{R}$ Mengenring” und
aus 1.2.Fall“$0 \neq \mathfrak{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen a): $0 \in \mathfrak{R}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(\mathfrak{R} = 0) \vee (0 \in \mathfrak{R})$.

$\square$

346-8. Im Folgenden soll die Konzentration auf Mengenringen$\neq 0$ liegen, die Teil-Klasse des Definitions-Bereichs eines $\Box$_Gewichts sind.

346-8(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $0 \neq \mathfrak{R}$ *Mengenring.*

$\rightarrow)$ ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$.

Dann folgt: "$\phi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\phi[\mathfrak{R}]$."

Beweis **346-8**

`1.1:` Aus $\rightarrow)$"$0 \neq \mathfrak{R}$ Mengenring"
folgt via **346-7**: $0 \in \mathfrak{R}$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$"$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi = \mathfrak{R}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $0 \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi$.

`3:` Aus $\rightarrow)$"ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \ldots$" und
aus 2"$0 \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **346-3**: $\phi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\phi[\mathfrak{R}]$.

$\Box$

346-9. Eine vielleicht anwendungsfreundlichere Formulierung von **346-8** lautet wie vorliegend.

346-9(Satz) *Es gelte:*

→) $0 \neq \mathfrak{R}$ *Mengenring.*

→) ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$.

→) $A \in \mathfrak{R}$.

Dann folgt "$\phi(A) = \phi(A)\_\Box\_\phi(0) = \phi(0)\_\Box\_\phi(A)$".

ALG-**Notation**.

Beweis **346-9**

1: Aus →) "$0 \neq \mathfrak{R}$ Mengenring" und
aus →) "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **346-8**: $\phi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\phi[\mathfrak{R}]$.

2: Aus 1 "$\phi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\phi[\mathfrak{R}]$"
folgt via **208-1(Def)**:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \phi[\mathfrak{R}]) \Rightarrow (\phi(\alpha)\_\Box\_\phi(0) = \phi(0)\_\Box\_\phi(\alpha) = \phi(\alpha)).$$

3: Aus →) "$A \in \mathfrak{R}$" und
aus 2
folgt: $\phi(A)\_\Box\_\phi(0) = \phi(0)\_\Box\_\phi(A) = \phi(A)$.

4: Aus 3
folgt: $\phi(A) = \phi(A)\_\Box\_\phi(0) = \phi(0)\_\Box\_\phi(A)$.

$\Box$

346-10. Ist $\mathfrak{R}$ ein Mengenring und ist ϕ ein $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R}$, so gilt für disjunkte Elemente von $\mathfrak{R}$ die erwartete Rechenregel.

346-10(Satz) *Es gelte:*

→) $\mathfrak{R}$ *Mengenring.*

→) ϕ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathfrak{R}$.

→) $A, B \in \mathfrak{R}$.

→) $A \cap B = 0$.

Dann folgt "$\phi(A)\_\Box\_\phi(B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **346-10**

`1`: Aus `VS` gleich "$\mathfrak{R}$ Mengenring" und
aus →) "$A, B \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-6**: $A \cup B \in \mathfrak{R}$.

`2`: Aus →) "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R}$",
aus →) "$A, B \in \mathfrak{R}$",
aus `1` "$A \cup B \in \mathfrak{R}$" und
aus →) "$A \cap B = 0$"
folgt via **346-3**: $\phi(A)\_\Box\_\phi(B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

$\Box$

346-11. Unter Einbeziehung von Mengenringen transformieren sich **346-3**`de)` unter dann vereinfachten Voraussetzungen in Vorliegendes.

346-11(Satz) *Es gelte:*

→) $\mathfrak{R}$ *Mengenring.*

→) ϕ *ist* $\square\_$*Gewicht auf* $\mathfrak{R}$.

→) $A, B \in \mathfrak{R}$.

Dann folgt:

`a)` $\phi(A) = \phi(A \cap B)\_\square\_\phi(A \cap B^C)$.

`b)` $\phi(A) = \phi(A \cap B^C)\_\square\_\phi(A \cap B)$.

`c)` $\phi(A \cap B)\_\square\_\phi(A \cap B^C) = \phi(A \cap B^C)\_\square\_\phi(A \cap B)$.

`d)` $\phi(A \cup B) = \phi(A \cap B^C)\_\square\_\phi(B)$.

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis</u> **346-11** `abc)`

`1:` Aus $\rightarrow\!\!)$ "$\mathfrak{R}$ Mengenring" und
aus $\rightarrow\!\!)$ "$A, B \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-6**: $A \cap B, A \cap B^C \in \mathfrak{R}$.

`2.a):` Aus $\rightarrow\!\!)$ "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{R}$",
aus $\rightarrow\!\!)$ "$A \ldots \in \mathfrak{R}$" und
aus `1` "$A \cap B, A \cap B^C \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-3**: $\phi(A) = \phi(A \cap B)\_\square\_\phi(A \cap B^C)$.

`2.b):` Aus $\rightarrow\!\!)$ "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{R}$",
aus $\rightarrow\!\!)$ "$A \ldots \in \mathfrak{R}$" und
aus `1` "$A \cap B, A \cap B^C \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-3**: $\phi(A) = \phi(A \cap B^C)\_\square\_\phi(A \cap B)$.

`2.c):` Aus $\rightarrow\!\!)$ "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{R}$",
aus $\rightarrow\!\!)$ "$A \ldots \in \mathfrak{R}$" und
aus `1` "$A \cap B, A \cap B^C \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-3**: $\phi(A \cap B)\_\square\_\phi(A \cap B^C) = \phi(A \cap B^C)\_\square\_\phi(A \cap B)$.

`d)`

`1:` Aus $\rightarrow\!\!)$ "$\mathfrak{R}$ Mengenring" und
aus $\rightarrow\!\!)$ "$A, B \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-6**: $A \cup B, A \cap B^C \in \mathfrak{R}$.

`2:` Aus $\rightarrow\!\!)$ "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{R}$",
aus `1` "$A \cup B, A \cap B^C \in \mathfrak{R}$" und
aus $\rightarrow\!\!)$ "$\ldots B \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-3**: $\phi(A \cup B) = \phi(A \cap B^C)\_\square\_\phi(B)$.

$\square$

346-12. Ist $\mathfrak{R}$ ein Mengenring, der eine Teil-Klasse des Definitions-Bereichs eines $\square$_Gewichts auf $\mathfrak{R}$ ist und ist überdies $\square$ assoziativ auf $\mathfrak{R}$, so ist x kommutativ auf $\phi[\mathfrak{R}]$.

346-12(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $\mathfrak{R}$ *Mengenring.*

$\rightarrow)$ ϕ *ist* $\square$*_Gewicht auf* $\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$.

$\rightarrow)$ $\square$ *assoziativ auf* $\phi[\mathfrak{R}]$.

Dann folgt "x kommutativ auf $\phi[\mathfrak{R}]$".

Beweis **346-12**

ALG-**Notation**.

`Thema0` $\alpha, \beta \in \phi[\mathfrak{R}]$.

1.1: Aus $\rightarrow)$ "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{R}\ldots$"
folgt via **346-1(Def)**: ϕ Funktion.

1.2: Aus $\rightarrow)$ "$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi = \mathfrak{R}$.

2.1: Aus 1.1 "ϕ Funktion" und
aus Thema0 "$\alpha \ldots \in \phi[\mathfrak{R}]$"
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathfrak{R}) \wedge (\alpha = \phi(\Omega))$.

2.2: Aus 1.1 "ϕ Funktion" und
aus Thema0 "$\ldots \beta \in \phi[\mathfrak{R}]$"
folgt via **18-28**: $\exists \Phi : (\Phi \in \mathfrak{R}) \wedge (\beta = \phi(\Phi))$.

...

...

Beweis **346-12** ...

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta \in \phi[\mathfrak{R}]$.

...

`3.1:` Aus `2.1`"$\ldots \Omega \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus `1.2`
folgt: $\Omega \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\, \phi$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots \Phi \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus `1.2`
folgt: $\Phi \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\, \phi$.

`3.3:` Aus →) "$\mathfrak{R}$ Mengenring",
aus `2.1`"$\ldots \Omega \in \mathfrak{R} \ldots$" und
aus `2.2`"$\ldots \Phi \in \mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **346-6**: $\Omega \cup \Phi, \Omega \cap \Phi, \Omega \cap \Phi^C, \Omega^C \cap \Phi \in \mathfrak{R}$.

`4:` Aus `3.3`"$\ldots \Omega \cap \Phi, \Omega \cap \Phi^C, \Omega^C \cap \Phi \in \mathfrak{R}$" und
aus `1.2`
folgt: $\Omega \cap \Phi, \Omega \cap \Phi^C, \Omega^C \cap \Phi \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\, \phi$.

`5:` Aus →) "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R}$",
aus `3.3`"$\Omega \cup \Phi \ldots \in \mathfrak{R}$",
aus `3.1`"$\Omega \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\, \phi$",
aus `3.2`"$\Phi \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\, \phi$",
aus `4`"$\Omega \cap \Phi, \Omega \cap \Phi^C, \Omega^C \cap \Phi \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\, \phi$" und
aus →) "$\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathfrak{R}]$"
folgt via **346-3**: $\phi(\Omega)\_\Box\_\phi(\Phi) = \phi(\Phi)\_\Box\_\phi(\Omega)$.

`6:` Aus `5`,
aus `2.1`"$\ldots \alpha = \phi(\Omega)$" und
aus `2.2`"$\ldots \beta = \phi(\Phi)$"
folgt: $\alpha\_\Box\_\beta = \beta\_\Box\_\alpha$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \phi[\mathfrak{R}]) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta = \beta\_\Box\_\alpha)$.

Konsequenz via **210-1(Def)**: x kommutativ auf $\phi[\mathfrak{R}]$.

$\Box$

346-13. Natürlich ist von **346-12** und von **346-3**`fgh)` auch eine "Argument-orientierte" Version verfügbar.

346-13(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $\mathfrak{R}$ *Mengenring.*

$\rightarrow$) ϕ *ist* $\Box$*_Gewicht auf* $\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$.

$\rightarrow$) $\Box$ *assoziativ auf* $\phi[\mathfrak{R}]$.

$\rightarrow$) $A, B \in \mathfrak{R}$.

Dann folgt:

`a)` $\phi(A)\_\Box\_\phi(B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

`b)` $\phi(A \cap B)\_\Box\_\phi(A \cup B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

`c)` $\phi(A \cap B)\_\Box\_\phi(A \cup B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

`d)` $\phi(A \cup B)\_\Box\_\phi(A \cap B) = \phi(A)\_\Box\_\phi(B)$.

`e)` $\phi(A \cup B)\_\Box\_\phi(A \cap B) = \phi(B)\_\Box\_\phi(A)$.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **346-13**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$\mathfrak{R}$ Mengenring",
aus $\rightarrow$) "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$" und
aus $\rightarrow$) "$\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathfrak{R}]$"
folgt via **346-12**: x kommutativ auf $\phi[\mathfrak{R}]$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "$\mathfrak{R}$ Mengenring" und
aus $\rightarrow$) "$A, B \in \mathfrak{R}$"
folgt via **346-6**: $A \cup B, A \cap B, A \cap B^C, A^C \cap B \in \mathfrak{R}$.

`1.3:` Aus $\rightarrow$) "$\ldots \mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **folk**: $\mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi = \mathfrak{R}$.

`1.4:` Aus $\rightarrow$) "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R} \ldots$"
folgt via **346-1(Def)**: ϕ Funktion.

...

<u>Beweis</u> **346-13** ...

`2.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$A, B \in \mathfrak{R}$" und
aus `1.3`
folgt: $A, B \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi$.

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $A \cup B, A \cap B, A \cap B^C, A^C \cap B \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi$.

`3.1:` Aus `1.4`"ϕ Funktion" und
aus `2.1`"$A, B \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **18-27**: $\phi(A), \phi(B) \in \phi[\mathfrak{R}]$.

`3.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R}$",
aus $\rightarrow\!)$ "$A \ldots \in \mathfrak{R}$",
aus `1.2`"$A \cup B \ldots \in \mathfrak{R}$",
aus `2.1`"$\ldots B \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi$",
aus `2.2`"$\ldots A \cap B, A \cap B^C \ldots \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathfrak{R}]$"
folgt via **346-3**: $\phi(A)\_\Box\_\phi(B) = \phi(A \cap B)\_\Box\_\phi(A \cup B)$.

`3.3:` Aus $\rightarrow\!)$ "ϕ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathfrak{R}$",
aus $\rightarrow\!)$ "$\ldots B \in \mathfrak{R}$",
aus `1.2`"$A \cup B \ldots \in \mathfrak{R}$",
aus `2.1`"$A \ldots \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi$",
aus `2.2`"$\ldots A \cap B \ldots \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi$",
aus `2.2`"$\ldots A^C \cap B \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\Box$ assoziativ auf $\phi[\mathfrak{R}]$"
folgt via **346-3**: $\phi(B)\_\Box\_\phi(A) = \phi(A \cap B)\_\Box\_\phi(A \cup B)$.

`3.4:` Aus `1.4`"ϕ Funktion" und
aus `2.2`"$A \cup B \ldots \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **18-27**: $\phi(A \cup B) \in \phi[\mathfrak{R}]$.

`3.5:` Aus `1.4`"ϕ Funktion" und
aus `2.2`"$\ldots A \cap B \ldots \in \mathfrak{R} \cap \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **18-27**: $\phi(A \cap B) \in \phi[\mathfrak{R}]$.

...

<u>Beweis</u> <u>**346-13**</u> ...

`4.a)`: Aus `1.1` "x kommutativ auf $\phi[\mathfrak{R}]$" und
aus `3.1` "$\phi(A), \phi(B) \in \phi[\mathfrak{R}]$"
folgt via **210-1(Def)**: $\phi(A)_{-}\square_{-}\phi(B) = \phi(B)_{-}\square_{-}\phi(A)$.

`4.b)`: Aus `3.2`
folgt: $\phi(A \cap B)_{-}\square_{-}\phi(A \cup B) = \phi(A)_{-}\square_{-}\phi(B)$.

`4.c)`: Aus `3.3`
folgt: $\phi(A \cap B)_{-}\square_{-}\phi(A \cup B) = \phi(B)_{-}\square_{-}\phi(A)$.

`4.1`: Aus `1.1` "x kommutativ auf $\phi[\mathfrak{R}]$",
aus `3.4` "$\phi(A \cup B) \in \phi[\mathfrak{R}]$" und
aus `3.5` "$\phi(A \cap B) \in \phi[\mathfrak{R}]$"
folgt via **210-1(Def)**: $\phi(A \cup B)_{-}\square_{-}\phi(A \cap B) = \phi(A \cap B)_{-}\square_{-}\phi(A \cup B)$.

`5.d)`: Aus `4.b)` und
aus `4.1`
folgt: $\phi(A \cup B)_{-}\square_{-}\phi(A \cap B) = \phi(A)_{-}\square_{-}\phi(B)$.

`5.e)`: Aus `4.c)` und
aus `4.1`
folgt: $\phi(A \cup B)_{-}\square_{-}\phi(A \cap B) = \phi(B)_{-}\square_{-}\phi(A)$.

$\square$

346-14. Die Eigenschaft, $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$ zu sein, vererbt sich auf $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$.

346-14(Satz)

Aus "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{M}$" und "$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$"
folgt "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{N}$".

Beweis **346-14** `VS` gleich $(\phi \text{ ist } \square\text{\_Gewicht auf } \mathfrak{M}) \wedge (\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M})$.

`ALG`-**Notation**.

`1.1:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{M} \ldots$"
folgt via **346-1(Def)**: ϕ Funktion.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{N}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{N} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$"
folgt via **folk**: $\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}$.

`3:` Aus `VS` gleich "ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{M} \ldots$",
aus `2`"$\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha \cap \beta = 0$"
folgt via **346-1(Def)**: $\phi(\alpha \cup \beta) = \phi(\alpha)\_\square\_\phi(\beta)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{N}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)) \Rightarrow (\phi(\alpha \cup \beta) = \phi(\alpha)\_\square\_\phi(\beta))$"

`2:` Aus `1.1`"ϕ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{N}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0))$
$\Rightarrow (\phi(\alpha \cup \beta) = \phi(\alpha)\_\square\_\phi(\beta))$"
folgt via **346-1(Def)**:
ϕ ist $\square$_Gewicht auf $\mathfrak{N}$.

$\square$

346-15. Zum Abschluss des Essays werden sieben Beispiele von $\Box$_Gewichten, $\Box = \mathsf{A}$ oder $\Box = \mathsf{M}$, angegeben.

346-15(Satz)

a) zo *ist* A_*Gewicht auf* $\mathfrak{M}$.

b) zo *ist* M_*Gewicht auf* $\mathfrak{M}$.

c) $(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ *ist* A_*Gewicht auf* $\mathfrak{M}$.

d) $(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ *ist* A_*Gewicht auf* $\mathfrak{M}$.

e) $1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ *ist* M_*Gewicht auf* $\mathfrak{M}$.

f) $(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ *ist* M_*Gewicht auf* $\mathfrak{M}$.

g) $\#$ *ist* A_*Gewicht auf* $\mathfrak{M}$.

Beweis **346-15**

`RECH`-**Notation**.

...

<u>Beweis</u> **346-15** a)

1.1: Via **346-2** gilt: zo Funktion.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha, \beta \ldots \in \mathfrak{M} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: α, β Menge.

3.1: Aus 2 "$\alpha \ldots$ Menge"
folgt via **346-2**: $\mathsf{zo}(\alpha) = 0$.

3.2: Aus 2 "$\ldots, \beta$ Menge"
folgt via **346-2**: $\mathsf{zo}(\beta) = 0$.

3.3: Aus 2 "α, β Menge"
folgt via $\cup$**Axiom**: $\alpha \cup \beta$ Menge.

4: Aus 3.3 "$\alpha \cup \beta$ Menge"
folgt via **346-2**: $\mathsf{zo}(\alpha \cup \beta) = 0$.

5: $\mathsf{zo}(\alpha \cup \beta) \stackrel{4}{=} 0 \stackrel{+\textbf{schola}}{=} 0 + 0 \stackrel{3.1}{=} \mathsf{zo}(\alpha) + 0 \stackrel{3.2}{=} \mathsf{zo}(\alpha) + \mathsf{zo}(\beta)$.

Ergo Thema1.2:

A1	"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)) \Rightarrow (\mathsf{zo}(\alpha \cup \beta) = \mathsf{zo}(\alpha) + \mathsf{zo}(\beta))$"

2: Aus 1.1 "zo Funktion" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)) \Rightarrow (\mathsf{zo}(\alpha \cup \beta) = \mathsf{zo}(\alpha) + \mathsf{zo}(\beta))$"
folgt via **346-1(Def)**:

zo ist A_Gewicht auf $\mathfrak{M}$.

Beweis **346-15** `b)`

`1.1:` Via **346-2** gilt: zo Funktion.

> `Thema1.2` $(\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha, \beta \ldots \in \mathfrak{M} \ldots$"
> folgt via **ElementAxiom**: α, β Menge.
>
> `3.1:` Aus `2`"$\alpha \ldots$ Menge"
> folgt via **346-2**: $\mathsf{zo}(\alpha) = 0$.
>
> `3.2:` Aus `2`"$\ldots, \beta$ Menge"
> folgt via **346-2**: $\mathsf{zo}(\beta) = 0$.
>
> `3.3:` Aus `2`"α, β Menge"
> folgt via $\cup$**Axiom**: $\alpha \cup \beta$ Menge.
>
> `4:` Aus `3.3`"$\alpha \cup \beta$ Menge"
> folgt via **346-2**: $\mathsf{zo}(\alpha \cup \beta) = 0$.
>
> `5:` $\mathsf{zo}(\alpha \cup \beta) \stackrel{4}{=} 0 \stackrel{\cdot\textbf{schola}}{=} 0 \cdot 0 \stackrel{3.1}{=} \mathsf{zo}(\alpha) \cdot 0 \stackrel{3.2}{=} \mathsf{zo}(\alpha) \cdot \mathsf{zo}(\beta)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)) \Rightarrow (\mathsf{zo}(\alpha \cup \beta) = \mathsf{zo}(\alpha) \cdot \mathsf{zo}(\beta))$"

`2:` Aus `1.1`"zo Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0))$
$\Rightarrow (\mathsf{zo}(\alpha \cup \beta) = \mathsf{zo}(\alpha) \cdot \mathsf{zo}(\beta))$"
folgt via **346-1(Def)**:

zo ist M_Gewicht auf $\mathfrak{M}$.

<u>Beweis **346-15**</u> `c)`

`1.1`: Via **214-4** gilt: $(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ Funktion.

> `Thema1.2` $(\alpha,\beta,\alpha\cup\beta\in\mathfrak{M})\wedge(\alpha\cap\beta=0)$.
>
> `2.1`: Aus `Thema1.2`"$\alpha\ldots\in\mathfrak{M}\ldots$" und
> aus **95-3**"$+\infty$ Menge"
> folgt via **214-4**: $(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha)=+\infty$.
>
> `2.2`: Aus `Thema1.2`"$\ldots\beta\ldots\in\mathfrak{M}\ldots$" und
> aus **95-3**"$+\infty$ Menge"
> folgt via **214-4**: $(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta)=+\infty$.
>
> `2.3`: Aus `Thema1.2`"$\ldots\alpha\cup\beta\in\mathfrak{M}\ldots$" und
> aus **95-3**"$+\infty$ Menge"
> folgt via **214-4**: $(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha\cup\beta)=+\infty$.
>
> `3`: $(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha\cup\beta)\stackrel{2.3}{=}+\infty\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(+\infty)+(+\infty)$
> $\stackrel{2.1}{=}(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha)+(+\infty)\stackrel{2.2}{=}(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha)+(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | "$\forall\alpha,\beta:((\alpha,\beta,\alpha\cup\beta\in\mathfrak{M})\wedge(\alpha\cap\beta=0))$
$\Rightarrow((+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha\cup\beta)=(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha)+(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta))$"

`2`: Aus `1.1`"$(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall\alpha,\beta:((\alpha,\beta,\alpha\cup\beta\in\mathfrak{M})\wedge(\alpha\cap\beta=0))$
$\Rightarrow((+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha\cup\beta)=(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha)+(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta))$"
folgt via **346-1(Def)**:
$(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ ist A_Gewicht auf $\mathfrak{M}$.

<u>Beweis **346-15** `d)`</u>

`1.1:` Via **214-4** gilt: $(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ Funktion.

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha,\beta,\alpha\cup\beta\in\mathfrak{M})\wedge(\alpha\cap\beta=0)$.
>
> `2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha\ldots\in\mathfrak{M}\ldots$" und
> aus **95-3**"$-\infty$ Menge"
> folgt via **214-4**: $(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha)=-\infty$.
>
> `2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots\beta\ldots\in\mathfrak{M}\ldots$" und
> aus **95-3**"$-\infty$ Menge"
> folgt via **214-4**: $(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta)=-\infty$.
>
> `2.3:` Aus `Thema1.2`"$\ldots\alpha\cup\beta\in\mathfrak{M}\ldots$" und
> aus **95-3**"$-\infty$ Menge"
> folgt via **214-4**: $(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha\cup\beta)=-\infty$.
>
> `3:` $(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha\cup\beta)\stackrel{2.3}{=}-\infty\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(-\infty)+(-\infty)$
> $\stackrel{2.1}{=}(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha)+(-\infty)\stackrel{2.2}{=}(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha)+(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall\alpha,\beta:((\alpha,\beta,\alpha\cup\beta\in\mathfrak{M})\wedge(\alpha\cap\beta=0))$ $\Rightarrow((-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha\cup\beta)=(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha)+(-\infty)^{\mathbf{on}}(\beta))$"

`2:` Aus `1.1`"$(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall\alpha,\beta:((\alpha,\beta,\alpha\cup\beta\in\mathfrak{M})\wedge(\alpha\cap\beta=0))$
$\Rightarrow((-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha\cup\beta)=(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha)+(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta))$"
folgt via **346-1(Def)**:

$(-\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ ist A_Gewicht auf $\mathfrak{M}$.

<u>Beweis **346-15**</u> `e)`

`1.1`: Via **214-4** gilt: $1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ Funktion.

> `Thema1.2` $(\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)$.
>
> `2.1`: Aus `Thema1.2` "$\alpha \ldots \in \mathfrak{M} \ldots$" und
> aus $\in$**schola** "1 Menge"
> folgt via **214-4**: $1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha) = 1$.
>
> `2.2`: Aus `Thema1.2` "$\ldots \beta \ldots \in \mathfrak{M} \ldots$" und
> aus $\in$**schola** "1 Menge"
> folgt via **214-4**: $1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta) = 1$.
>
> `2.3`: Aus `Thema1.2` "$\ldots \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M} \ldots$" und
> aus $\in$**schola** "1 Menge"
> folgt via **214-4**: $1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha \cup \beta) = 1$.
>
> `3`: $1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha \cup \beta) \stackrel{2.3}{=} 1 \stackrel{\cdot\mathbf{schola}}{=} 1 \cdot 1 \stackrel{2.1}{=} 1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha) \cdot 1$
> $\stackrel{2.2}{=} 1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha) \cdot 1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0))$
$\Rightarrow (1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha \cup \beta) = 1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha) \cdot 1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta))$"

`2`: Aus `1.1` "$1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0))$
$\Rightarrow (1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha \cup \beta) = 1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha) \cdot 1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta))$"
folgt via **346-1(Def)**:

$1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ ist M_Gewicht auf $\mathfrak{M}$.

<u>Beweis **346-15** `f)`</u>

`1.1:` Via **214-4** gilt: $(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ Funktion.

> `Thema1.2` $(\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)$.
>
> `2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \ldots \in \mathfrak{M} \ldots$" und
> aus **95-3**"$+\infty$ Menge"
> folgt via **214-4**: $(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha) = +\infty$.
>
> `2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \ldots \in \mathfrak{M} \ldots$" und
> aus **95-3**"$+\infty$ Menge"
> folgt via **214-4**: $(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta) = +\infty$.
>
> `2.3:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M} \ldots$" und
> aus **95-3**"$+\infty$ Menge"
> folgt via **214-4**: $(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha \cup \beta) = +\infty$.
>
> `3:` $(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha \cup \beta) \stackrel{2.3}{=} +\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty)$
> $\stackrel{2.1}{=} (+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha) \cdot (+\infty) \stackrel{2.2}{=} (+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha) \cdot (+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0))$
$\Rightarrow ((+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha \cup \beta) = (+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha) \cdot (+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta))$"

`2:` Aus `1.1`"$(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0))$
$\Rightarrow ((+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha \cup \beta) = (+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\alpha) \cdot (+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}(\beta))$"
folgt via **346-1(Def)**:
$(+\infty)^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ ist M_Gewicht auf $\mathfrak{M}$.

<u>Beweis</u> **346-15** g)

`1.1:` Via **297-15** gilt: $\#$ Funktion.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$(\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)$.
`2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha \cap \beta = 0$" folgt via **297-21**:	$\#(\alpha) + \#(\beta) = \#(\alpha \cup \beta)$.
`3:` Aus `2` folgt:	$\#(\alpha \cup \beta) = \#(\alpha) + \#(\beta)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)) \Rightarrow (\#(\alpha \cup \beta) = \#(\alpha) + \#(\beta))$"

`2:` Aus `1.1`"$\#$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta, \alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}) \wedge (\alpha \cap \beta = 0)) \Rightarrow (\#(\alpha \cup \beta) = \#(\alpha) + \#(\beta))$"
folgt via **346-1(Def)**:

$\#$ ist A_Gewicht auf $\mathfrak{M}$.

$\square$

- **H. Bauer**, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, De-Gruyter, 1978(3).
- **H. Brauner**, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **K.P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- **Wikipedia**. *http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt.* Datum: 14-01-09. Letzte Änderung: 13-12-12 06:46.