Suite V - Die den Weg Weisende

Teil 5: Essays 356-364

$$\left(\begin{smallmatrix}\mathtt{rek}\\ q,x\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right).$$

$$(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi).\ \left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right).$$

universelle $\in$Relation in.

$p\_M.x$, $x.M\_q$, $x.M.y$ **auf** E.

$p \subseteq .x$, $x. \subseteq q$, $x. \subseteq .y$, $p \not\subseteq .x$, $x. \not\subseteq q$, $x. \not\subseteq .y$ **auf** E.

$p \subset .x$, $x. \subset q$, $x. \subset .y$, $p \not\subset .x$, $x. \not\subset q$, $x. \not\subset .y$ **auf** E.

$p = .x$, $x. = q$, $x. = .y$, $p \neq .x$, $x. \neq q$, $x. \neq .y$ **auf** E.

MSC2010: 03E75. 28A10. 28A12.

Andreas Unterreiter

30. September 2016

Analysis: Funktions-Eigenschaften von $R(n)$, $n \in \mathsf{dom}\, R$, R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$, $\Box$ Algebra in A.
Hinreichendes für $\mathtt{rf2}\phi q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$.

Ersterstellung: 11/08/15 **Letzte Änderung: 14/12/15**

356-1. Ist ϕ eine Funktion und ist $\Box$ eine Algebra in A, so ist $R(1)$ für $1 \in \mathsf{dom}\, R$, R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$, eine Funktion. Im Speziellen ist unter den genannten Bedingungen an $\phi, \Box$ auch $\mathtt{rf2}\phi q\Box(1)$ für $1 \in \mathtt{rf2}\phi q\Box$ eine Funktion.

356-1(Satz)

a) *Aus "ϕ Funktion"*
und "$\Box$ Algebra in A"
und "R ist **ana2** *von $\phi, q, \Box$"*
und "$1 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt $R(1)$ Funktion.

b) *Aus "ϕ Funktion"*
und "$\Box$ Algebra in A"
und "$1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$"
folgt $\mathtt{rf2}\phi q\Box(1)$ Funktion.

Beweis **356-1** a) VS gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A)$
$\wedge(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, \Box) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R)$.

1: Aus VS gleich "… $\Box$ Algebra in A …"
folgt via **93-6**: $\Box$ Funktion.

2: Aus VS gleich "… R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$ …",
aus VS gleich "ϕ Funktion… ",
aus 1 "$\Box$ Funktion" und
aus VS gleich "… $1 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **352-8**: $R(1)$ Funktion.

b) VS gleich $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box))$.

1: Aus VS gleich "… $\Box$ Algebra in A …"
folgt via **93-6**: $\Box$ Funktion.

2: Aus VS gleich "ϕ Funktion… ",
aus 1 "$\Box$ Funktion" und
aus VS gleich "… $1 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$"
folgt via **352-8**: $\mathtt{rf2}\phi q\Box(1)$ Funktion.

$\Box$

356-2. Ähnlich wie in **342-3** für $\mathsf{337.0}(f,\Box)$ ist es gelegentlich interessant, ob $\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)$ - f,ϕ Funktion, $\Box$ Algebra in A - eine Funktion ist.

<u>**356-2(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) f,ϕ *Funktion.*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow$) $\forall\alpha,\beta,\gamma$:

$$((\alpha\neq\beta)\wedge(\alpha,\beta\notin\gamma)\wedge(f(\{\alpha\}\cup\gamma),f(\{\beta\}\cup\gamma),\phi(\alpha),\phi(\beta)\in A))$$
$$\Rightarrow(f(\{\alpha\}\cup\gamma)_{-}\Box_{-}\phi(\beta)=f(\{\beta\}\cup\gamma)_{-}\Box_{-}\phi(\alpha)).$$

Dann folgt "$\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)$ *Funktion".*

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

$$\mathsf{350.0}(x,z,y)=\{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta):(\lambda\notin\mu)$$
$$\wedge(\exists\Omega,\Xi:((\mu,\Omega)\in x)\wedge((\lambda,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}$$

Beweis **356-2**

`1.1:` Via **350-2** gilt: $\mathsf{350.0}(f,\phi,\square)$ Relation.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\delta,\epsilon),(\delta,\eta)\in\mathsf{350.0}(f,\phi,\square)$.

`2.1:` Aus →) "f,ϕ Funktion",
aus →) "$\square$ Algebra in A" und
aus `Thema1.2` "$(\delta,\epsilon)\ldots\in\mathsf{350.0}(f,\phi,\square)$"
folgt via **353-8**: $\exists\Phi,\Psi:(f(\Psi)\in A)\wedge(\Phi\in\phi^{-1}[A])\wedge(\Phi\notin\Psi)$
$\wedge(\delta=\{\Phi\}\cup\Psi)\wedge(\epsilon=f(\Psi)\_\square\_\phi(\Phi))$.

`2.2:` Aus →) "f,ϕ Funktion",
aus →) "$\square$ Algebra in A" und
aus `Thema1.2` "$\ldots(\delta,\eta)\in\mathsf{350.0}(f,\phi,\square)$"
folgt via **353-8**: $\exists\Omega,\Gamma:(f(\Gamma)\in A)\wedge(\Omega\in\phi^{-1}[A])\wedge(\Omega\notin\Gamma)$
$\wedge(\delta=\{\Omega\}\cup\Gamma)\wedge(\eta=f(\Gamma)\_\square\_\phi(\Omega))$.

`3.1:` Aus `2.1` "$\ldots\delta=\{\Phi\}\cup\Psi\ldots$" und
aus `2.2` "$\ldots\delta=\{\Omega\}\cup\Gamma\ldots$"
folgt: $\{\Phi\}\cup\Psi=\{\Omega\}\cup\Gamma$.

`3.2:` Aus →) "$\ldots\phi$ Funktion" und
aus `2.1` "$\ldots\Phi\in\phi^{-1}[A]\ldots$"
folgt via **18-29**: $\phi(\Phi)\in A$.

`3.3:` Aus →) "$\ldots\phi$ Funktion" und
aus `2.2` "$\ldots\Omega\in\phi^{-1}[A]\ldots$"
folgt via **18-29**: $\phi(\Omega)\in A$.

`4:` Es gilt: $(\Phi=\Omega)\vee(\Phi\neq\Omega)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

...

<u>Beweis</u> **356-2** ...

`Thema1.2` $(\delta, \epsilon), (\delta, \eta) \in \mathsf{350.0}(f, \phi, \square)$.

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\Phi = \Omega$.

`5.1:` Aus `4.1.Fall` "$\Phi = \Omega$"
folgt: $f(\Psi)\_\square\_\phi(\Phi) = f(\Psi)\_\square\_\phi(\Omega)$.

`5.2:` Aus `3.1` "$\{\Phi\} \cup \Psi = \{\Omega\} \cup \Gamma$",
aus `2.1` "$\ldots \Phi \notin \Psi$",
aus `2.2` "$\ldots \Omega \notin \Gamma \ldots$" und
aus `4.1.Fall` "$\Phi = \Omega$"
folgt via **342-2**: $\Psi = \Gamma$.

`6.1:` Aus `2.1` "$\ldots \epsilon = f(\Psi)\_\square\_\phi(\Phi)$" und
aus `5.1`
folgt: $\epsilon = f(\Psi)\_\square\_\phi(\Omega)$.

`6.2:` Aus `5.2`
folgt: $f(\Psi)\_\square\_\phi(\Omega) = f(\Gamma)\_\square\_\phi(\Omega)$.

`7:` Aus `6.1` und
aus `6.2`
folgt: $\epsilon = f(\Gamma)\_\square\_\phi(\Omega)$.

`8:` Aus `7` und
aus `2.2` "$\ldots \eta = f(\Gamma)\_\square\_\phi(\Omega)$"
folgt: $\epsilon = \eta$.

...

...

Beweis **356-2** ...

`Thema1.2` $(\delta, \epsilon), (\delta, \eta) \in \mathsf{350.0}(f, \phi, \Box)$.

...

`Fallunterscheidung`

`4.2.Fall` $\Phi \neq \Omega$.

`5:` Aus `3.1`"$\{\Phi\} \cup \Psi = \{\Omega\} \cup \Gamma$",
aus `2.1`"$\ldots \Phi \notin \Psi \ldots$",
aus `2.2`"$\ldots \Omega \notin \Gamma \ldots$" und
aus `4.2.Fall`"$\Phi \neq \Omega$"
folgt via **342-2**:
$\exists \Upsilon : (\Phi, \Omega \notin \Upsilon) \wedge (\Psi = \{\Omega\} \cup \Upsilon) \wedge (\Gamma = \{\Phi\} \cup \Upsilon)$.

`6.1:` Aus `2.1`"$\ldots f(\Psi) \in A \ldots$" und
aus `5`"$\ldots \Psi = \{\Omega\} \cup \Upsilon \ldots$"
folgt: $f(\{\Omega\} \cup \Upsilon) \in A$.

`6.2:` Aus `2.2`"$\ldots f(\Gamma) \in A \ldots$" und
aus `5`"$\ldots \Gamma = \{\Phi\} \cup \Upsilon$"
folgt: $f(\{\Phi\} \cup \Upsilon) \in A$.

`7:` Aus `4.2.Fall`"$\Phi \neq \Omega$",
aus `5`"$\ldots \Phi, \Omega \notin \Upsilon \ldots$",
aus `6.2`"$f(\{\Phi\} \cup \Upsilon) \in A$",
aus `6.1`"$f(\{\Omega\} \cup \Upsilon) \in A$",
aus `3.2`"$\phi(\Phi) \in A$",
aus `3.3`"$\phi(\Omega) \in A$" und
aus `VS` gleich
"$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \neq \beta) \wedge (\alpha, \beta \notin \gamma)$
$\wedge (f(\{\alpha\} \cup \gamma), f(\{\beta\} \cup \gamma), \phi(\alpha), \phi(\beta) \in A))$
$\Rightarrow (f(\{\alpha\} \cup \gamma)\_\Box\_\phi(\beta) = f(\{\beta\} \cup \gamma)\_\Box\_\phi(\alpha))$"
folgt: $f(\{\Phi\} \cup \Upsilon)\_\Box\_\phi(\Omega) = f(\{\Omega\} \cup \Upsilon)\_\Box\_\phi(\Phi)$.

`8:` Aus `7` und
aus `5`"$\ldots (\Psi = \{\Omega\} \cup \Upsilon) \wedge (\Gamma = \{\Phi\} \cup \Upsilon)$"
folgt: $f(\Gamma)\_\Box\_\phi(\Omega) = f(\Psi)\_\Box\_\phi(\Phi)$.

`9:` Aus `8`,
aus `2.2`"$\ldots \eta = f(\Gamma)\_\Box\_\phi(\Omega)$" und
aus `2.1`"$\ldots \epsilon = f(\Psi)\_\Box\_\phi(\Phi)$"
folgt: $\eta = \epsilon$.

`10:` Aus `9`
folgt: $\epsilon = \eta$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\epsilon = \eta$.

...

<u>Beweis</u> **<u>356-2</u>** . . .

. . .

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\; \text{“}\forall \delta,\epsilon,\eta : ((\delta,\epsilon),(\delta,\eta) \in \mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)\,) \Rightarrow (\epsilon = \eta)\text{”}}$

`2:` Aus `1.1` “$\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)$ Relation” und
aus `A2` gleich “$\forall \delta,\epsilon,\eta : ((\delta,\epsilon),(\delta,\eta) \in \mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)\,) \Rightarrow (\epsilon = \eta)$”
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)$ Funktion.

$\Box$

356-3. Ist $\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)$ - f,ϕ Funktion, $\Box$ Algebra in A - eine Funktion, so kann unter Zuhilfenahme von **353-8** etwas über $\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)\,(\{p\}\cup E)$ ausgesagt werden.

356-3(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *f,ϕ Funktion.*

$\rightarrow\!)$ *$\Box$ Algebra in A.*

$\rightarrow\!)$ *$\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)$ Funktion.*

$\rightarrow\!)$ *$p\notin E$.*

$\rightarrow\!)$ *$p\in\phi^{-1}[A]$.*

$\rightarrow\!)$ *$f(E)\in A$.*

Dann folgt "$\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)\,(\{p\}\cup E)=f(E)\_\Box\_\phi(p)$".

ALG-Notation.

$$\begin{aligned}\mathsf{350.0}(x,z,y) &= \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta):(\lambda\notin\mu)\\ &\qquad\wedge(\exists\Omega,\Xi:((\mu,\Omega)\in x)\wedge((\lambda,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}\end{aligned}$$

Beweis **356-3**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "f,ϕ Funktion",
aus $\rightarrow\!)$ "$\Box$ Algebra in A",
aus $\rightarrow\!)$ "$p\notin E$",
aus $\rightarrow\!)$ "$p\in\phi^{-1}[A]$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$f(E)\in A$"
folgt via **353-8**: $(\{p\}\cup E, f(E)\_\Box\_\phi(p))\in\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "$\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)$ Funktion" und
aus 1 "$(\{p\}\cup E, f(E)\_\Box\_\phi(p))\in\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)$"
folgt via **folk**: $f(E)\_\Box\_\phi(p)=\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)\,(\{p\}\cup E)$.

3: Aus 2
folgt: $\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)\,(\{p\}\cup E)=f(E)\_\Box\_\phi(p)$.

$\Box$

356-4. Soll $\mathsf{350.0}(\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)\,,\phi,\Box)$ - f,ϕ Funktion, $\Box$ Algebra in A - eine Funktion sein, so ist es gelegentlich hilfreich, die Allquantor-Voraussetzung von **356-2** in Bedingungen an f,ϕ und $\Box$ zu zerlegen.

356-4(Satz) *Es gelte:*

→) f,ϕ *Funktion.*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) $\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)$ *Funktion.*

→) $\forall\alpha,\beta : ((\alpha\notin\beta)\wedge(\alpha\ \mathit{Menge})\wedge(\{\alpha\}\cup\beta\in\mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)\,)))$
$\Rightarrow(\beta\in\mathsf{dom}\,f)$.

→) $\mathsf{ran}\,f\subseteq A$.

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf* A.

Dann folgt "$\mathsf{350.0}(\mathsf{350.0}(f,\phi,\Box)\,,\phi,\Box)$ *Funktion*".

$$\mathsf{350.0}(x,z,y)=\{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta):(\lambda\notin\mu)\wedge(\exists\Omega,\Xi:((\mu,\Omega)\in x)\wedge((\lambda,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}$$

Beweis **356-4**

`ALG`-**Notation**.

...

Beweis **356-4** ...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\delta \neq \epsilon) \wedge (\delta, \epsilon \notin \eta)$
$\wedge(\mathsf{350.0}(f, \phi, \Box)\,(\{\delta\} \cup \eta), \mathsf{350.0}(f, \phi, \Box)\,(\{\epsilon\} \cup \eta), \phi(\delta), \phi(\epsilon)$
$\in A)$.

2.1: Aus VS gleich "$\ldots \phi(\delta) \ldots \in A$"
folgt via **344-3**: δ Menge.

2.2: Aus Thema1"$\ldots \mathsf{350.0}(f, \phi, \Box)\,(\{\delta\} \cup \eta) \ldots \in A$"
folgt via **344-3**: $\{\delta\} \cup \eta \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(f, \phi, \Box)\,)$.

2.3: Aus →) "$\ldots \phi$ Funktion" und
aus Thema1"$\ldots \phi(\delta) \ldots \in A$"
folgt via **18-29**: $\delta \in \phi^{-1}[A]$.

2.4: Aus →) "$\ldots \phi$ Funktion" und
aus Thema1"$\ldots \phi(\epsilon) \in A$"
folgt via **18-29**: $\epsilon \in \phi^{-1}[A]$.

3: Aus Thema1"$\ldots \delta \ldots \notin \eta \ldots$",
aus 2.1"δ Menge",
aus 2.2"$\{\delta\} \cup \eta \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(f, \phi, \Box)\,)$" und
aus →)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha$ Menge)
$\wedge(\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(f, \phi, \Box)\,)))$
$\Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\, f)$"
folgt: $\eta \in \mathsf{dom}\, f$.

4: Aus →) "f Funktion" und
aus 3"$\eta \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $f(\eta) \in \mathsf{ran}\, f$.

5: Aus 4"$f(\eta) \in \mathsf{ran}\, f$" und
aus →) "$\mathsf{ran}\, f \subseteq A$"
folgt via **folk**: $f(\eta) \in A$.

6: Aus 5"$f(\eta) \in A$",
aus Thema1"$\ldots \phi(\delta), \phi(\epsilon) \in A$" und
aus →) "$\Box$ tunnelt rechts auf A"
folgt via **344-1(Def)**:
$$(f(\eta)_{-}\Box_{-}\phi(\delta))_{-}\Box_{-}\phi(\epsilon) = (f(\eta)_{-}\Box_{-}\phi(\epsilon))_{-}\Box_{-}\phi(\delta).$$

...

...

Beweis **356-4** ...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\delta \neq \epsilon) \wedge (\delta, \epsilon \notin \eta)$
$\wedge(350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\delta\}\cup\eta), 350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\epsilon\}\cup\eta), \phi(\delta), \phi(\epsilon) \in A).$

...

7.1: Aus →) "f, ϕ Funktion",
aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "$350.0(f,\phi,\Box)$ Funktion",
aus Thema1 "$\ldots\delta\ldots\notin\eta\ldots$",
aus 2.3 "$\delta \in \phi^{-1}[A]$" und
aus 5 "$f(\eta) \in A$"
folgt via **356-3**: $350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\delta\}\cup\eta) = f(\eta)\_\Box\_\phi(\delta).$

7.2: Aus →) "f, ϕ Funktion",
aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "$350.0(f,\phi,\Box)$ Funktion",
aus Thema1 "$\ldots\epsilon\notin\eta\ldots$",
aus 2.4 "$\epsilon \in \phi^{-1}[A]$" und
aus 5 "$f(\eta) \in A$"
folgt via **356-3**: $350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\epsilon\}\cup\eta) = f(\eta)\_\Box\_\phi(\epsilon).$

8: $350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\delta\}\cup\eta)\_\Box\_\phi(\epsilon) \stackrel{7.1}{=} (f(\eta)\_\Box\_\phi(\delta))\_\Box\_\phi(\epsilon)$
$\stackrel{6}{=} (f(\eta)\_\Box\_\phi(\epsilon))\_\Box\_\phi(\delta)$
$\stackrel{7.2}{=} 350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\epsilon\}\cup\eta)\_\Box\_\phi(\delta).$

Ergo Thema1:

A1 | "$\forall\delta,\epsilon,\eta : ((\delta \neq \epsilon) \wedge (\delta, \epsilon \notin \eta)$
$\wedge(350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\delta\}\cup\eta), 350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\epsilon\}\cup\eta), \phi(\delta), \phi(\epsilon) \in A))$
$\Rightarrow (350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\delta\}\cup\eta)\_\Box\_\phi(\epsilon) = 350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\epsilon\}\cup\eta)\_\Box\_\phi(\delta))$"

2: Aus →) "$337.0(f,\Box)$ Funktion",
aus →) "$\ldots\phi$ Funktion",
aus →) "$\Box$ Algebra in A" und
aus A1 gleich "$\forall\delta,\epsilon,\eta : ((\delta \neq \epsilon) \wedge (\delta, \epsilon \notin \eta)$
$\wedge(350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\delta\}\cup\eta), 350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\epsilon\}\cup\eta), \phi(\delta), \phi(\epsilon) \in A))$
$\Rightarrow (350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\delta\}\cup\eta)\_\Box\_\phi(\epsilon) = 350.0(f,\phi,\Box)\,(\{\epsilon\}\cup\eta)\_\Box\_\phi(\delta))$"
folgt via **356-2**: $350.0(350.0(f,\phi,\Box)\,,\phi,\Box)$ Funktion.

□

356-5. An Zwischenschritten kann das Ziel erahnt werden.

356-5(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow\!)$ $q \in A$.

$\rightarrow\!)$ R *ist* **ana2** *von* $\phi, q, \Box$.

$\rightarrow\!)$ $n \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow\!)$ $1 + n \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt

$$\text{“}\forall \alpha, \beta : ((\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \ \mathit{Menge}) \wedge (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{350.0}(R(n), \phi, \Box)))) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(R(n)))\text{”}.$$

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

$$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$$

<u>Beweis **356-5**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ “R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$”,
aus $\rightarrow\!)$ “$n \in \mathbb{N}$” und
aus $\rightarrow\!)$ “$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-1**: $n \in \mathsf{dom}\, R$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ “$\Box$ Algebra in A”,
aus $\rightarrow\!)$ “$q \in A$”,
aus $\rightarrow\!)$ “R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$” und
aus $\rightarrow\!)$ “$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-5**: $\mathsf{dom}\,(R(1 + n)) = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+n)})$.

`1.3:` Aus $\rightarrow\!)$ “R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$”,
aus $\rightarrow\!)$ “$n \in \mathbb{N}$” und
aus $\rightarrow\!)$ “$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-1**: $R(1 + n) = \mathsf{350.0}(R(n), \phi, \Box)$.

...

Beweis **356-5** . . .

2.1: Aus →) " $\square$ Algebra in A ",
aus →) " $q \in A$ ",
aus →) " R ist **ana2** von $\phi, q, \square$ " und
aus 1.1 " $n \in \mathsf{dom}\, R$ "
folgt via **354-5**: $\mathsf{dom}\,(R(n)) = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

2.2: Aus →) " $n \in \mathbb{N}$ "
folgt via **297-4**: $-1 + (1 + n) = n$.

3: Aus 1.2 und
aus 2.2
folgt: $\mathsf{dom}\,(R(1 + n)) = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

$\boxed{\texttt{Thema4}}$
$(\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \text{ Menge}) \wedge (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{dom}\,(350.0(R(n), \phi, \square)))$.

5: Aus Thema4 " . . . $\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{dom}\,(350.0(R(n), \phi, \square))$ " und
aus 1.3
folgt: $\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{dom}\,(R(1 + n))$.

6: Aus 5 und
aus 3
folgt: $\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

7: Aus →) " $n \in \mathbb{N}$ ",
aus 6 " $\{\alpha\} \cup \beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$ ",
aus Thema4 " $(\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \text{ Menge})$ . . . "
folgt via **344-5**: $\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

8: Aus 7 und
aus 2.1
folgt: $\beta \in \mathsf{dom}\,(R(n))$.

Ergo Thema4:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \text{ Menge}) \wedge (\{\alpha\} \cup \beta \in 350.0(R(n), \phi, \square))) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(R(n))).$$

$\square$

356-6. In einem “Doppelschritt” vererbt sich unter interessanten Bedingungen die Funktions-Eigenschaft von $R(n), R(1+n)$ auf $R(1+(1+n))$, R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$, $\Box$ Algebra in A.

356-6(Satz) *Es gelte:*

→) ϕ *Funktion.*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf* A.

→) $q \in A$.

→) R *ist* **ana2** *von* $\phi, q, \Box$.

→) $R(n), R(1+n)$ *Funktion.*

→) $1+(1+n) \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt “$R(1+(1+n))$ *Funktion*”.

ALG.RECH-**Notation**.

Beweis **356-6**

$$\mathsf{350.0}(x,z,y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu,\Omega) \in x) \wedge ((\lambda,\Xi) \in z) \wedge (((\Omega,\Xi),\eta) \in y))\}$$

1.1: Aus →) “$R(n), R(1+n)$ Funktion”
folgt via **339-5**: $n, 1+n \in \mathsf{dom}\, R$.

1.2: Aus →) “R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$”,
aus →) “$\ldots R(1+n)$ Funktion” und
aus →) “$1+(1+n) \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-1**: $R(1+(1+n)) = \mathsf{350.0}(R(1+n), \phi, \Box)$.

2: Aus →) “R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$”,
aus →) “$R(n) \ldots$ Funktion” und
aus 1.1 “$\ldots 1+n \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-1**: $R(1+n) = \mathsf{350.0}(R(n), \phi, \Box)$.

...

<u>Beweis</u> **356-6** ...

3: Aus 2 und
aus →) " $\ldots R(1+n)$ Funktion "
folgt: $\mathsf{350.0}(R(n), \phi, \Box)$ Funktion.

4: Aus →) " R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$ " und
aus 1.1 " $n \in \mathsf{dom}\, R$ "
folgt via **354-1**: $n \in \mathbb{N}$.

5: Aus →) " $\Box$ Algebra in A ",
aus →) " $q \in A$ ",
aus →) " R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$ ",
aus 4 " $n \in \mathbb{N}$ " und
aus 1.1 " $\ldots 1+n \in \mathsf{dom}\, R$ "
folgt via **356-5**:
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \text{ Menge}) \wedge (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{350.0}(R(n), \phi, \Box)\,))$
$\Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(R(n)))$.

6: Aus →) " $\Box$ Algebra in A ",
aus →) " $q \in A$ ",
aus →) " R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$ " und
aus 1.1 " $n \ldots \in \mathsf{dom}\, R$ "
folgt via **354-5**: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$.

7: Aus →) " $R(n) \ldots$ Funktion ",
aus →) " ϕ Funktion ",
aus →) " $\Box$ Algebra in A ",
aus 3 " $\mathsf{350.0}(R(n), \phi, \Box)$ Funktion ",
aus 5 " $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \notin \beta) \wedge (\alpha \text{ Menge}) \wedge (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{350.0}(R(n), \phi, \Box)\,))$
$\Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\,(R(n)))$ ",
aus 6 " $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$ " und
aus →) " $\Box$ tunnelt rechts auf A "
folgt via **356-4**: $\mathsf{350.0}(\mathsf{350.0}(R(n), \phi, \Box)\,, \phi, \Box)$ Funktion.

8: Aus 7 und
aus 2
folgt: $\mathsf{350.0}(R(1+n), \phi, \Box)$ Funktion.

9: Aus 8 und
aus 1.2
folgt: $R(1+(1+n))$ Funktion.

$\Box$

356-7. Unter vertraut erscheinenden Bedinungen stellt sich $\mathtt{rf2}\phi q\square(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ als Funktion heraus.

356-7(Satz) *Es gelte:*

→) ϕ *Funktion.*

→) $\square$ *Algebra in* A.

→) A *Menge.*

→) $\square$ *tunnelt rechts auf* A.

→) $q \in A$.

Dann folgt:

a) $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf2}\phi q\square(\alpha)$ *Funktion*$)$.

b) $\mathtt{rf2}\phi q\square : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$.

Beweis **356-7**

RECH-Notation.
$339.1(x) = \{\omega : x(\omega) \text{ Funktion}\}$.

1.1: Aus →) "$\Box$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $\mathrm{ran}\,\Box \subseteq A$.

1.2: Via **352-4** gilt: $\mathtt{rf2}\phi q\Box(0)$ Funktion.

2.1: Aus 1.1 "$\mathrm{ran}\,\Box \subseteq A$" und
aus →) "A Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathrm{ran}\,\Box$ Menge.

2.2: Aus 1.2 "$\mathtt{rf2}\phi q\Box(0)$ Funktion"
folgt via **339-5**: $0 \in 339.1(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$.

3: Aus 2.1 "$\mathrm{ran}\,\Box$ Menge"
folgt via **350-13**: $\mathrm{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box) = \mathbb{N}$.

4: Aus ∈**schola** "$1 \in \mathbb{N}$" und
aus 3
folgt: $1 \in \mathrm{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$.

5: Aus →) "ϕ Funktion",
aus →) "$\Box$ Algebra in A" und
aus 3 "$1 \in \mathrm{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$"
folgt via **356-1**: $\mathtt{rf2}\phi q\Box(1)$ Funktion.

6: Aus 4 "$\mathtt{rf2}\phi q\Box(1)$ Funktion"
folgt via **339-5**: $1 \in 339.1(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$.

...

Beweis **356-7** ...

$\boxed{\texttt{Thema7}}$ $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{339.1}(\mathtt{rf2}\phi q\Box)\,)$.

`8.1:` Aus `Thema7`"$\alpha \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **344-12**: $1+(1+\alpha) \in \mathbb{N}$.

`8.2:` Aus `Thema7`"$\ldots \alpha, 1+\alpha \in \mathsf{339.1}(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$"
folgt **p.def.**: $\mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha), \mathtt{rf2}\phi q\Box(1+\alpha)$ Funktion.

`9.1:` Aus `8.1` und
aus `3`
folgt: $1+(1+\alpha) \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$.

`9.2:` Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf2}\phi q\Box$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

`10:` Aus →) "ϕ Funktion",
aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "$\Box$ tunnelt rechts auf A",
aus →) "$q \in A$",
aus `9.2`"$\mathtt{rf2}\phi q\Box$ ist **ana2** von ϕ, q, x",
aus `8.2`"$\mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha), \mathtt{rf2}\phi q\Box(1+\alpha)$ Funktion" und
aus `9.1`"$1+(1+\alpha) \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$"
folgt via **356-6**: $\mathtt{rf2}\phi q\Box(1+(1+\alpha))$ Funktion.

`11:` Aus `10`"$\mathtt{rf2}\phi q\Box(1+(1+\alpha))$ Funktion"
folgt via **339-5**: $1+(1+\alpha) \in \mathsf{339.1}(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$.

Ergo `Thema7`:

`A1` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{339.1}(\mathtt{rf2}\phi q\Box)\,))$
$\Rightarrow (1+(1+\alpha) \in \mathsf{339.1}(\mathtt{rf2}\phi q\Box)\,)$"

`8:` Aus `2.2`"$0 \in \mathsf{339.1}(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$",
aus `6`"$1 \in \mathsf{339.1}(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$" und
aus `A1`"$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{339.1}(\mathtt{rf2}\phi q\Box)\,))$
$\Rightarrow (1+(1+\alpha) \in \mathsf{339.1}(\mathtt{rf2}\phi q\Box)\,)$"
folgt via **344-13**: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{339.1}(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$.

...

<u>Beweis</u> **<u>356-7</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema9}}$ $\alpha \in \mathbb{N}$.

10: Aus Thema9 "$\alpha \in \mathbb{N}$" und
aus 8 "$\mathbb{N} \subseteq 339.1(\texttt{rf}2\phi q\square)$"
folgt via **folk**: $\alpha \in 339.1(\texttt{rf}2\phi q\square)$.

11: Aus 10 "$\alpha \in 339.1(\texttt{rf}2\phi q\square)$"
folgt **p.def.**: $\texttt{rf}2\phi q\square(\alpha)$ Funktion.

Ergo Thema9: Aa) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\texttt{rf}2\phi q\square(\alpha)$ Funktion$)$"

10: Via **350-10** gilt: $\texttt{rf}2\phi q\square$ Funktion.

...

<u>Beweis **356-7**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema11}}$ $\qquad\beta \in \mathsf{ran}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)$.

12.1: Aus Thema11 "$\beta \in \mathsf{ran}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

12.2: Aus 10 "$\texttt{rf}2\phi q\Box$ Funktion" und
aus Thema11 "$\beta \in \mathsf{ran}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)$"
folgt via **18-24**:
$$\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)) \wedge (\beta = \texttt{rf}2\phi q\Box(\Omega)).$$

13: Aus 12.2 "... $\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)$ ..." und
aus 3
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

14: Aus 13 und
aus Aa) gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\texttt{rf}2\phi q\Box(\alpha)$ Funktion)"
folgt: $\texttt{rf}2\phi q\Box(\Omega)$ Funktion.

15: Aus 21.2 "... $\beta = \texttt{rf}2\phi q\Box(\Omega)$" und
aus 13
folgt: β Funktion.

16: Aus 12.1 "β Menge" und
aus 15 "β Funktion"
folgt via **212-2**: $\beta \in \mathsf{func}$.

Ergo Thema11: $\quad\forall\beta : (\beta \in \mathsf{ran}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{func})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“}\mathsf{ran}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box) \subseteq \mathsf{func}\text{”}}$

12.b): Aus 9 "$\texttt{rf}2\phi q\Box$ Funktion",
aus 3 "$\mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box) = \mathbb{N}$" und
aus A2 gleich "$\mathsf{ran}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box) \subseteq \mathsf{func}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\texttt{rf}2\phi q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$.

$\Box$

356-8. Die Voraussetzungen von **356-7** können durch schwächere, aber griffigere Bedingungen ersetzt werden.

356-8(Satz) *Es gelte:*

→) ϕ *Funktion.*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) A *Menge.*

→) $\Box$ *kommutativ auf* A.

→) $\Box$ *assoziativ auf* A.

→) $q \in A$.

Dann folgt:

a) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha)$ *Funktion*$)$.

b) $\mathtt{rf2}\phi q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$.

<u>Beweis **356-8**</u>

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

`1:` Aus →) “ $\square$ kommutativ auf A ” und
aus →) “ $\square$ assoziativ auf A ”
folgt via **344-15**: $\square$ tunnelt rechts auf A.

`2.a):` Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ A Menge ” ,
aus `1` “ $\square$ tunnelt rechts auf A ” und
aus →) “ $q \in A$ ”
folgt via **356-7**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf2}\phi q\square(\alpha) \text{ Funktion})$.

`2.b):` Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ A Menge ” ,
aus `1` “ $\square$ tunnelt rechts auf A ” und
aus →) “ $q \in A$ ”
folgt via **356-7**: $\mathtt{rf2}\phi q\square : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$.

$\square$

Algebra: $\left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ q,x\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)$.

Ersterstellung: 11/08/15 **Letzte Änderung: 14/12/15**

357-1. Die Summation einer Funktion ϕ über eine endliche Menge wird durch $\left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ q,x\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)$ vorbereitet. Dem allgemeinen Charakter der Darstellung folgend muss hier ϕ keine Funktion sein, auch wenn in den meisten Anwendungen diese Zusatzvoraussetzung vermutlich gilt. Die Zeichenfolge "`rek`" stellt einen Bezug zum "rekursiven Wesen" von $\texttt{rf2}\phi qx$ her.

357-1(Definition)

$$\left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ q,x\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)=\bigcup \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi qx).$$

357-2. Nun soll das "Element-Sein" in $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$ angesprochen werden. Dabei ist es hilfreich, dass $\texttt{rf2}\phi qx$ stets eine Funktion ist.

357-2(Satz)

a) *Aus* "$w \in \left(\overset{\texttt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$"
folgt "$\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi qx)) \wedge (w \in \texttt{rf2}\phi qx(\Omega))$".

b) *Aus* "$n \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi qx)$" *und* "$w \in \texttt{rf2}\phi qx(n)$"
folgt "$w \in \left(\overset{\texttt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$".

Beweis **357-2** a) VS gleich $w \in \left(\overset{\texttt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$.

1: Aus VS gleich "$w \in \left(\overset{\texttt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$"
folgt **p.def.**: $w \in \bigcup \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi qx)$.

2: Via **350-10** gilt: $\texttt{rf2}\phi qx$ Funktion.

3: Aus 2"$\texttt{rf2}\phi qx$ Funktion" und
aus 1"$w \in \bigcup \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi qx)$"
folgt via **345-3**: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi qx)) \wedge (w \in \texttt{rf2}\phi qx(\Omega))$.

b) VS gleich $(n \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi qx)) \wedge (w \in \texttt{rf2}\phi qx(n))$.

1: Via **350-10** gilt: $\texttt{rf2}\phi qx$ Funktion.

2: Aus 1"$\texttt{rf2}\phi qx$ Funktion",
aus VS gleich "$n \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi qx)\ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots w \in \texttt{rf2}\phi qx(n)$"
folgt via **345-3**: $w \in \bigcup \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi qx)$.

3: Aus 2"$w \in \bigcup \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi qx)$"
folgt **p.def.**: $w \in \left(\overset{\texttt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$.

□

357-3. $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$ wartet geradezu auf die Anwendung von **345-7**.

357-3(Satz)

a) *Aus* “$p\in\mathsf{dom}\,\left(\overset{\texttt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$”
folgt “$\exists\Omega,\Gamma:(\Omega\in\mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi qx))\wedge((p,\Gamma)\in\texttt{rf}2\phi qx(\Omega))$.

b) *Aus* “$q\in\mathsf{ran}\,\left(\overset{\texttt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$”
folgt “$\exists\Omega,\Gamma:(\Omega\in\mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi qx))\wedge((\Gamma,q)\in\texttt{rf}2\phi qx(\Omega))$.

c) *Aus* “$(p,q)\in\texttt{rf}2\phi qx(n)$” *und* “$n\in\mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi qx)$”
folgt “$p\in\mathsf{dom}\,\left(\overset{\texttt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$” *und* “$q\in\mathsf{ran}\,\left(\overset{\texttt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$”.

<u>Beweis</u> **357-3** `a)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\left(\substack{\texttt{rek}\\ q,x}\middle|\,\phi\right)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\left(\substack{\texttt{rek}\\ q,x}\middle|\,\phi\right)$"
folgt **p.def.**: $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi q x))$.

`2:` Via **350-10** gilt: $\texttt{rf2}\phi q x$ Funktion.

`3:` Aus `2`"$\texttt{rf2}\phi q x$ Funktion" und
aus `1`"$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi q x))$"
folgt via **345-7**: $\exists \Omega, \Gamma : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q x)) \wedge ((p, \Gamma) \in \texttt{rf2}\phi q x(\Omega))$.

`b)` `VS` gleich $q \in \mathsf{ran}\left(\substack{\texttt{rek}\\ q,x}\middle|\,\phi\right)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in \mathsf{ran}\left(\substack{\texttt{rek}\\ q,x}\middle|\,\phi\right)$"
folgt **p.def.**: $q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi q x))$.

`2:` Via **350-10** gilt: $\texttt{rf2}\phi q x$ Funktion.

`3:` Aus `2`"$\texttt{rf2}\phi q x$ Funktion" und
aus `1`"$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi q x))$"
folgt via **345-7**: $\exists \Omega, \Gamma : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q x)) \wedge ((\Gamma, q) \in \texttt{rf2}\phi q x(\Omega))$.

`c)` `VS` gleich $((p, q) \in \texttt{rf2}\phi q x(n)) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q x))$.

`1:` Via **350-10** gilt: $\texttt{rf2}\phi q x$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\texttt{rf2}\phi q x$ Funktion" und
aus `VS` gleich "$((p, q) \in \texttt{rf2}\phi q x(n)) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q x))$"
folgt via **345-7**: $(p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi q x))) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi q x)))$.

`3:` Aus `2`
folgt **p.def.**: $\left(p \in \mathsf{dom}\left(\substack{\texttt{rek}\\ q,x}\middle|\,\phi\right)\right) \wedge \left(q \in \mathsf{ran}\left(\substack{\texttt{rek}\\ q,x}\middle|\,\phi\right)\right)$.

$\square$

357-4. Mit Hilfe von **345-9** können Definitions- und Werte-Bereich von $\left(\substack{\mathtt{rek}\\ q,x}\middle|\,\phi\right)$ gut charakterisiert werden.

357-4(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\left(\substack{\mathtt{rek}\\ q,x}\middle|\,\phi\right)$"
folgt "$\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx(\Omega)))$".

b) *Aus* "$q \in \mathsf{ran}\left(\substack{\mathtt{rek}\\ q,x}\middle|\,\phi\right)$"
folgt "$\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi qx(\Omega)))$".

c) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx(n))$" *und* "$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$"
folgt "$p \in \mathsf{dom}\left(\substack{\mathtt{rek}\\ q,x}\middle|\,\phi\right)$".

d) *Aus* "$q \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi qx(n))$" *und* "$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$"
folgt "$q \in \mathsf{ran}\left(\substack{\mathtt{rek}\\ q,x}\middle|\,\phi\right)$".

<u>Beweis **357-4**</u> a) VS gleich $p \in \mathsf{dom}\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{dom}\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$"
folgt **p.def.**: $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi qx))$.

2: Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion.

3: Aus 2"$\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion" und
aus 1"$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi qx))$"
folgt via **345-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx(\Omega)))$.

b) VS gleich $q \in \mathsf{ran}\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$.

1: Aus VS gleich "$q \in \mathsf{ran}\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$"
folgt **p.def.**: $q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi qx))$.

2: Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion.

3: Aus 2"$\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion" und
aus 1"$q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi qx))$"
folgt via **345-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)) \wedge (q \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi qx(\Omega)))$.

c) VS gleich $(p \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx(n))) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx))$.

1: Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion.

2: Aus 1"$\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion" und
aus VS gleich "$(p \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx(n))) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx))$"
folgt via **345-9**: $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi qx))$.

3: Aus 2
folgt **p.def.**: $p \in \mathsf{dom}\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$.

d) VS gleich $(q \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi qx(n))) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx))$.

1: Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion.

2: Aus 1"$\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion" und
aus VS gleich "$(q \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi qx(n))) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx))$"
folgt via **345-9**: $q \in \mathsf{ran}\,(\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi qx))$.

3: Aus 2
folgt **p.def.**: $q \in \mathsf{ran}\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$.

□

357-5. Weitere Vorbereitungen forcieren die Untersuchungen.

357-5(Satz)

a) *Aus* "R *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x" *und* "q *Menge*"
folgt "$0 \in \mathsf{dom}\,(R(0))$" *und* "$R(0)(0) = q$".

b) *Aus* "R *ist* **ana2** *von* $\phi, q, \square$"
und "ϕ *Funktion*"
und "$\square$ *Algebra in* A"
und "$1 \in \mathsf{dom}\, R$"
und "$p \in \phi^{-1}[A]$"
und "$q \in A$"
folgt "$R(1)(\{p\}) = q_{\_}\square_{\_}\phi(p)$".

c) *Aus* "R *ist* **ana2** *von* $\phi, q, \square$"
und "ϕ *Funktion*"
und "$\square$ *Algebra in* A"
und "$R(n), R(1+n)$ *Funktion*"
und "$p \in \phi^{-1}[A]$"
und "$q \in A$"
und "$E \in \mathsf{dom}\,(R(n))$"
und "$p \notin E$"
folgt $R(1+n)(\{p\} \cup E) = R(n)(E)_{\_}\square_{\_}\phi(p)$.

`RECH.ALG`-**Notation**.

Beweis **357-5**

$$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$$

<u>Beweis **357-5**</u> `a)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, x) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, x \ldots$"
folgt via **350-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`2.1:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots q$ Menge"
folgt via **259-37**: $0 \in \mathsf{dom}\,(\{(0, q)\})$.

`2.2:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots q$ Menge"
folgt via **259-37**: $(\{(0, q)\})(0) = q$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `1`
folgt: $\boxed{0 \in \mathsf{dom}\,(R(0))}$

`3.2:` Aus `2.2` und
aus `1`
folgt: $\boxed{R(0)(0) = q}$

`b)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, \square) \wedge (\phi \text{ Funktion}) \wedge (\square \text{ Algebra in } A)$
$\wedge (1 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (p \in \phi^{-1}[A]) \wedge (q \in A)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, \square \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 \in \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via **352-8**: $R(1) = \mathsf{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, \square)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \square$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **93-6**: $\square$ Funktion.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

...

Beweis **357-5** `b)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \textbf{ana2} \text{ von } \phi, q, \square) \wedge (\phi \text{ Funktion}) \wedge (\square \text{ Algebra in } A)$
$\wedge(1 \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (p \in \phi^{-1}[A]) \wedge (q \in A)$.

...

`2.1`: Via **259-36** gilt: $\{(0,q)\}$ Funktion.

`2.2`: Aus →) "ϕ Funktion" und
aus `1.2` "$\square$ Funktion"
folgt via **352-8**: $\mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,\square)$ Funktion.

`2.3`: Aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge" und
aus `1.3` "q Menge"
folgt via **259-37**: $\{(0,q)\}(0) = q$.

`2.4`: Via **folk** gilt: $p \notin 0$.

`3`: Aus `2.3` und
aus `VS` gleich "$\ldots q \in A$"
folgt: $\{(0,q)\}(0) \in A$.

`4`: Aus `2.1` "$\{(0,q)\}$ Funktion",
aus `VS` gleich "ϕ Funktion...",
aus `VS` gleich "$\ldots \square$ Algebra in $A \ldots$",
aus `2.2` "$\mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,\square)$ Funktion",
aus `2.4` "$p \notin 0$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \in \phi^{-1}[A] \ldots$" und
aus `3` "$\{(0,q)\}(0) \in A$"
folgt via **356-3**: $\mathsf{350.0}(\{(0,q)\},\phi,\square)\,(\{p\} \cup 0) = \{(0,q)\}(0)\_\square\_\phi(p)$.

`5`: Aus `4` und
aus `1.1`
folgt: $R(1)(\{p\} \cup 0) = \{(0,q)\}(0)\_\square\_\phi(p)$.

`6`: Aus `5` und
aus `2.3`
folgt: $R(1)(\{p\} \cup 0) = q\_\square\_\phi(p)$.

`7`: Via **folk** gilt: $\{p\} \cup 0 = \{p\}$.

`8`: Aus `6` und
aus `7`
folgt: $R(1)(\{p\}) = q\_\square\_\phi(p)$.

<u>Beweis **357-5** `c)`</u>

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \phi, q, \Box) \wedge (\phi \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra in } A)$
$\wedge (R(n), R(1+n) \text{ Funktion})$
$\wedge (p \in \phi^{-1}[A]) \wedge (q \in A) \wedge (E \in \mathsf{dom}\,(R(n))) \wedge (p \notin E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots R(n), R(1+n)$ Funktion$\ldots$"
folgt via **339-5**: $n, 1+n \in \mathsf{dom}\, R$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, \Box \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `1`"$n \ldots \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \in A \ldots$"
folgt via **354-5**: $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von $\phi, q, \Box \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots R(n) \ldots$ Funktion$\ldots$" und
aus `1`"$\ldots 1+n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **354-1**: $R(1+n) = \mathsf{350.0}(R(n), \phi, \Box)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots R(n) \ldots$ Funktion$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathsf{dom}\,(R(n)) \ldots$"
folgt via **18-22**: $R(n)(E) \in \mathsf{ran}\,(R(n))$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots R(1+n)$ Funktion $\ldots$" und
aus `2.2`
folgt: $\mathsf{350.0}(R(n), \phi, \Box)$ Funktion.

`4:` Aus `3.1`"$R(n)(E) \in \mathsf{ran}\,(R(n))$" und
aus `2.1`"$\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$"
folgt via **folk**: $R(n)(E) \in A$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots R(n) \ldots$ Funktion",
aus `VS` gleich "$\ldots \phi$ Funktion$\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `3.2`"$\mathsf{350.0}(R(n), \phi, \Box)$ Funktion",
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin E$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \in \phi^{-1}[A] \ldots$" und
aus `4`"$R(n)(E) \in A$"
folgt via **356-3**: $\mathsf{350.0}(R(n), \phi, \Box)\,(\{p\} \cup E) = R(n)(E)_\Box_\phi(p)$.

`6:` Aus `5` und
aus `2.2`
folgt: $R(1+n)(\{p\} \cup E) = R(n)(E)_\Box_\phi(p)$.

$\Box$

357-6. Nun soll der allgemeine Pfad verlassen und $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)$ für Funktionen ϕ und Algebren $\Box$ auf A unter vertraut erscheinenden Zusatz-Bedingungen untersucht werden.

357-6(Satz) *Es gelte:*

→) ϕ *Funktion.*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) A *Menge.*

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf* A.

→) $q \in A$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

b) $\mathsf{ran}\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right) \subseteq A$.

c) $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)$ *Funktion.*

d) $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)$ *Relation.*

e) $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]) \to A$.

f) $\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}))$
$\Rightarrow \quad \left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta) = \mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha)(\beta)$.

g) $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(0) = q$.

h) $\forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[A]) \Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}) = q_{\text{-}}\Box_{\text{-}}\phi(\alpha))$.

i) $\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]))$
$\Rightarrow \quad \left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta)_{\text{-}}\Box_{\text{-}}\phi(\alpha)$.

RECH.ALG-**Notation**.

Beweis **357-6**

1.1: Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus →) “ $\Box$ Algebra in A ” ,
aus →) “ A Menge ” ,
aus →) “ $\Box$ tunnelt rechts auf A ” und
aus →) “ $q \in A$ ”
folgt via **356-7**: $\texttt{rf2}\phi q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$.

1.2: Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus →) “ $\Box$ Algebra in A ” ,
aus →) “ A Menge ” ,
aus →) “ $\Box$ tunnelt rechts auf A ” und
aus →) “ $q \in A$ ”
folgt via **356-7**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\texttt{rf2}\phi q\Box(\alpha)$ Funktion$)$.

1.3: Via **350-10** gilt: $\texttt{rf2}\phi q\Box$ ist **ana2** von $\phi, q, \Box$.

2: Aus 1.1 “ $\texttt{rf2}\phi q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$ ”
folgt via **21-1(Def)**: $(\texttt{rf2}\phi q\Box$ Funktion$) \wedge (\mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box) = \mathbb{N})$.

...

Beweis **357-6** . . .

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\gamma \in \mathsf{dom}\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)$.

4: Aus Thema3.1 “$\gamma \in \mathsf{dom}\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)$”
folgt via **357-4**:
$$\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\square)) \wedge (\gamma \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\square(\Omega))).$$

5: Aus →) “$\square$ Algebra in A”,
aus 1.3 “$\texttt{rf2}\phi q\square$ ist **ana2** von $\phi, q, \square$”,
aus 4 “$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\square) \ldots$” und
aus →) “$q \in A$”
folgt via **354-5**:
$$\mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\square(\Omega)) = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}).$$

6: Aus 4 “$\ldots \gamma \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\square(\Omega))$” und
aus 5
folgt: $\gamma \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$.

7: Aus 4 “$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\square) \ldots$” und
aus 2 “$\ldots \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\square) = \mathbb{N}$”
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

8: Aus 7 “$\Omega \in \mathbb{N}$”
folgt via **345-11**:
$$\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]).$$

9: Aus 6 “$\gamma \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$” und
aus 8 “$\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$”
folgt via **folk**: $\gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

Ergo Thema3.1: $\forall\gamma : \left(\gamma \in \mathsf{dom}\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)\right) \Rightarrow (\gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1}\;\middle|\; \text{“}\mathsf{dom}\left(\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)\right) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])\text{”}}$

. . .

Beweis **357-6** ...

$\boxed{\texttt{Thema3.2}}$ $\gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

4: Aus Thema3.2 "$\gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$"
folgt via **345-11**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\gamma \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})).$$

5: Aus 4 "... $\Omega \in \mathbb{N}$ ..." und
aus 2 "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box) = \mathbb{N}$"
folgt: $\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$.

6: Aus →) "$\Box$ Algebra auf A",
aus 1.3 "$\mathtt{rf2}\phi q\Box$ ist **ana2** von $\phi, q, \Box$",
aus 5 "$\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$" und
aus →) "$q \in A$"
folgt via **354-5**:
$$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box(\Omega)) = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}).$$

7: Aus 4 "... $\gamma \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$" und
aus 6
folgt: $\gamma \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box(\Omega))$.

8: Aus 7 "$\gamma \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box(\Omega))$" und
aus 5 "$\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$"
folgt via **357-4**: $\gamma \in \mathsf{dom}\left(q,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)$.

Ergo Thema3.2: $\forall \gamma : (\gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])) \Rightarrow (\gamma \in \mathsf{dom}\left(q,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\mathtt{A2}\Big|\ \text{“}\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \subseteq \mathsf{dom}\left(q,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)\text{”}}$

4.a): Aus A1 gleich "$\mathsf{dom}\left(q,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$" und
aus A2 gleich "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \subseteq \mathsf{dom}\left(q,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\left(q,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

...

Beweis **357-6** ...

$\boxed{\texttt{Thema5}}$ $\gamma \in \mathsf{ran}\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right).$

6: Aus Thema5 "$\gamma \in \mathsf{ran}\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)$"
folgt via **357-4**:
$$\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box)) \wedge (\gamma \in \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box(\Omega))).$$

7: Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus 1.3 "$\texttt{rf2}\phi q\Box$ ist **ana2** von $\phi, q, \Box$",
aus 6 "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box) \ldots$" und
aus →) "$q \in A$"
folgt via **354-5**: $\mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box(\Omega)) \subseteq A.$

8: Aus 6 "$\ldots \gamma \in \mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box(\Omega))$" und
aus 7 "$\mathsf{ran}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box(\Omega)) \subseteq A$"
folgt via **folk**: $\gamma \in A.$

Ergo Thema5: $\forall\gamma : (\gamma \in \mathsf{ran}\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)) \Rightarrow (\gamma \in A).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{Ab)}\Big|\ \text{“}\mathsf{ran}\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right) \subseteq A\text{”}}$

...

Beweis **357-6** ...

$\boxed{\texttt{Thema6.1}}$ $\gamma \in \mathsf{ran}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)$.

7: Aus 2"$\texttt{rf}2\phi q\Box$ Funktion... " und
aus Thema6.1"$\gamma \in \mathsf{ran}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)$"
folgt via **18-24**:
$$\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)) \wedge (\gamma = \texttt{rf}2\phi q\Box(\Omega)).$$

8: Aus 7"$\ldots\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)\ldots$" und
aus 2"$\ldots\mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box) = \mathbb{N}$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

9: Aus 8"$\Omega \in \mathbb{N}$" und
aus 1.2"$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\texttt{rf}2\phi q\Box(\alpha)$ Funktion)"
folgt: $\texttt{rf}2\phi q\Box(\Omega)$ Funktion.

10: Aus 7"$\ldots\gamma = \texttt{rf}2\phi q\Box(\Omega)$" und
aus 9
folgt: γ Funktion.

Ergo Thema6.1: $\boxed{\texttt{A3} \mid \text{“}\forall\gamma : (\gamma \in \mathsf{ran}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)) \Rightarrow (\gamma \text{ Funktion})\text{”}}$

...

Beweis **357-6** ...

$\boxed{\texttt{Thema6.2}}$ $(\gamma, \delta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)) \wedge (\gamma \neq \delta)$.

`7.1:` Aus 2"$\mathtt{rf2}\phi q\Box$ Funktion..." und
aus `Thema6.2`"$\gamma \ldots \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box) \ldots$"
folgt via **18-24**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)) \wedge (\gamma = \mathtt{rf2}\phi q\Box(\Omega)).$$

`7.2:` Aus 2"$\mathtt{rf2}\phi q\Box$ Funktion..." und
aus `Thema6.2`"$\ldots \delta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box) \ldots$"
folgt via **18-24**:
$$\exists \Phi : (\Phi \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)) \wedge (\delta = \mathtt{rf2}\phi q\Box(\Phi)).$$

`8.1:` Aus `7.1`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box) \ldots$" und
aus 2"$\ldots \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box) = \mathbb{N}$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

`8.2:` Aus `7.2`"$\ldots \Phi \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box) \ldots$" und
aus 2"$\ldots \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box) = \mathbb{N}$"
folgt: $\Phi \in \mathbb{N}$.

`8.3:` Aus `7.1`"$\ldots \gamma = \mathtt{rf2}\phi q\Box(\Omega)$",
aus `7.2`"$\ldots \delta = \mathtt{rf2}\phi q\Box(\Phi)$" und
aus `Thema6.2`"$\ldots \gamma \neq \delta$"
folgt: $\mathtt{rf2}\phi q\Box(\Omega) \neq \mathtt{rf2}\phi q\Box(\Phi)$.

`8.4:` Aus →)"$\Box$ Algebra in A",
aus `1.3`"$\mathtt{rf2}\phi q\Box$ ist **ana2** von $\phi, q, \Box$",
aus `7.1`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box) \ldots$" und
aus →)"$q \in A$"
folgt via **354-5**:
$$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box(\Omega)) = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}).$$

`8.5:` Aus →)"$\Box$ Algebra in A",
aus `1.3`"$\mathtt{rf2}\phi q\Box$ ist **ana2** von $\phi, q, \Box$",
aus `7.2`"$\ldots \Phi \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box) \ldots$" und
aus →)"$q \in A$"
folgt via **354-5**:
$$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box(\Phi)) = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Phi \setminus \mathcal{U}_{-1+\Phi}).$$

...

...

Beweis **357-6** ...

$\boxed{\texttt{Thema6.2}}$ $(\gamma, \delta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q\square)) \wedge (\gamma \neq \delta)$.

...

9.1: Aus 8.3"$\mathtt{rf2}\phi q\square(\Omega) \neq \mathtt{rf2}\phi q\square(\Phi)$"
folgt via **94-10**: $\Omega \neq \Phi$.

9.2: Aus 7.1
folgt: $\gamma = \mathtt{rf2}\phi q\square(\Omega)$.

9.3: Aus 7.2
folgt: $\delta = \mathtt{rf2}\phi q\square(\Phi)$.

10: Aus 8.1"$\Omega \in \mathbb{N}$",
aus 8.2"$\Phi \in \mathbb{N}$" und
aus 9"$\Omega \neq \Phi$"
folgt via **338-2**: $(\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}) \cap (\mathcal{U}_\Phi \setminus \mathcal{U}_{-1+\Phi}) = 0$.

11: $$\begin{aligned}(\mathsf{dom}\,\gamma) \cap (\mathsf{dom}\,\delta) &\stackrel{9.2}{=} (\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\square(\Omega))) \cap (\mathsf{dom}\,\delta)\\ &\stackrel{9.3}{=} (\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\square(\Omega))) \cap (\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\square(\Phi)))\\ &\stackrel{8.4}{=} (\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})) \cap (\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\square(\Phi)))\\ &\stackrel{8.5}{=} (\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})) \cap (\mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Phi \setminus \mathcal{U}_{-1+\Phi}))\\ &\stackrel{\mathbf{2-19}}{=} \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap ((\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}) \cap (\mathcal{U}_\Phi \setminus \mathcal{U}_{-1+\Phi}))\\ &\stackrel{10}{=} \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap 0\\ &\stackrel{\mathbf{folk}}{=} 0.\end{aligned}$$

Ergo $\texttt{Thema6.2}$:

A4	"$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q\square)) \wedge (\gamma \neq \delta)) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\gamma) \cap (\mathsf{dom}\,\delta) = 0)$"

7: Aus A3 gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q\square)) \Rightarrow (\gamma$ Funktion$)$" und
aus A4 gleich "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q\square)) \wedge (\gamma \neq \delta))$
$\Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\gamma) \cap (\mathsf{dom}\,\delta) = 0)$"
folgt via **18-40**: $\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q\square)$ Funktion.

8.c): Aus 7
folgt **p.def.**: $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,\square} \middle| \phi\right)$ Funktion.

...

Beweis **357-6** ...

9.d): Aus 8.c) "$\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\,\middle|\,\phi\right)$ Funktion"

folgt via **18-18(Def)**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\,\middle|\,\phi\right)$ Relation.

9.e): Aus 8.c) "$\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\,\middle|\,\phi\right)$ Funktion",

aus 4.a) "$\mathsf{dom}\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\,\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$" und

aus Ab) gleich "$\mathsf{ran}\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\,\middle|\,\phi\right) \subseteq A$"

folgt via **21-1(Def)**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\,\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \to A$.

...

<u>Beweis **357-6**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema10}}$ $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}))$

`11:` Aus 2"$\ldots \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box) = \mathbb{N}$" und
aus `Thema10`"$\alpha \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$.

`12:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus `1.3`"$\mathtt{rf2}\phi q\Box$ ist **ana2** von $\phi, q, \Box$",
aus `11`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$" und
aus →) "$q \in A$"
folgt via **354-5**:
$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha)) = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})$.

`13:` Aus `VS` gleich "$\ldots \beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})$" und
aus `12`
folgt: $\beta \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha))$.

`14:` Aus 2"$\mathtt{rf2}\phi q\Box$ Funktion..." und
aus `11`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$"
folgt via **18-22**: $\mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha) \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$.

`15:` Aus `13`"$\beta \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha))$",
aus `14`"$\mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha) \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$" und
aus 7"$\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box)$ Funktion"
folgt via **345-12**: $\mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha)(\beta) = (\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q\Box))(\beta)$.

`16:` Aus `15`
folgt **p.def.**: $\mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha)(\beta) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{q,\Box}\,\middle|\,\phi\right)(\beta)$.

`17:` Aus `16`
folgt: $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,\Box}\,\middle|\,\phi\right)(\beta) = \mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha)(\beta)$.

Ergo `Thema10`:

`Af)` "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})))$
$\Rightarrow (\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,\Box}\,\middle|\,\phi\right)(\beta) = \mathtt{rf2}\phi q\Box(\alpha)(\beta))$"

...

Beweis **357-6** . . .

11: Via **345-12** gilt: $0 \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0})$.

12: Aus $\in$**schola**“$0 \in \mathbb{N}$”,
aus 11“$0 \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0})$” und
aus Af)“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})))$
$\Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta) = \texttt{rf2}\phi q\Box(\alpha)(\beta))$”
folgt: $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(0) = \texttt{rf2}\phi q\Box(0)(0)$.

13: Aus 1.3“$\texttt{rf2}\phi q\Box$ ist **ana2** von $\phi, q, \Box$” und
aus 10“q Menge”
folgt via **357-5**: $\texttt{rf2}\phi q\Box(0)(0) = q$.

14.g): Aus 12 und
aus 13
folgt: $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(0) = q$.

. . .

Beweis **357-6** . . .

$\boxed{\texttt{Thema15}}$ $\gamma \in \phi^{-1}[A]$.

`16:` Aus `Thema15`“$\gamma \in \phi^{-1}[A]$”
folgt via **345-12**: $\{\gamma\} \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_{-1+1})$.

`17:` Aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{N}$” und
aus `16`“$\{\gamma\} \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_{-1+1})$” und
aus `Af)`“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})))$
$\Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta) = \texttt{rf}2\phi q\Box(\alpha)(\beta))$”
folgt: $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\gamma\}) = \texttt{rf}2\phi q\Box(1)(\{\gamma\})$.

`18:` Aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{N}$” und
aus `2`“$\ldots \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box) = \mathbb{N}$”
folgt: $1 \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)$.

`19:` Aus `1.3`“$\texttt{rf}2\phi q\Box$ ist **ana2** von $\phi, q, \Box$”,
aus →)“ϕ Funktion”,
aus →)“$\Box$ Algebra in A”,
aus `18`“$1 \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}2\phi q\Box)$”,
aus `Thema15`“$\gamma \in \phi^{-1}[A]$” und
aus →)“$q \in A$”
folgt via **357-5**: $\texttt{rf}2\phi q\Box(1)(\{\gamma\}) = q\_\Box\_\phi(\gamma)$.

`20:` Aus `17` und
aus `19`
folgt: $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\gamma\}) = q\_\Box\_\phi(\gamma)$.

Ergo `Thema15`: $\forall \gamma : (\gamma \in \phi^{-1}[A]) \Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\gamma\}) = q\_\Box\_\phi(\gamma))$.

Konsequenz: `Ah)` “$\forall \alpha : (\alpha \in \phi{-}1[A]) \Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}) = q\_\Box\_\phi(\alpha))$”

. . .

Beweis **357-6** ...

$\boxed{\texttt{Thema16}}$ $(\gamma \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]))$.

`17:` Aus `Thema16`"... $\delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$"
folgt via **345-11**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\delta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})).$$

`18.1:` Aus `17`"... $\Omega \in \mathbb{N}$ ..." und
aus `17`"... $\delta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$" und
aus `Af)`"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})))$
$\Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box} \middle| \phi\right)(\beta) = \texttt{rf2}\phi q\Box(\alpha)(\beta))$"
folgt: $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box} \middle| \phi\right)(\delta) = \texttt{rf2}\phi q\Box(\Omega)(\delta)$.

`18.2:` Aus `Thema16`"$\gamma \in A$ ...",
aus `17`"... $\Omega \in \mathbb{N}$ ...",
aus `Thema16`"... $\gamma \notin \delta$ ..." und
aus `17`"... $\delta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$"
folgt via **345-12**:
$$\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+\Omega} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\Omega)}).$$

`18.3:` Aus `17`"... $\Omega \in \mathbb{N}$ ..."
folgt via **folk**: $1 + \Omega \in \mathbb{N}$.

`18.4:` Aus `17`"... $\Omega \in \mathbb{N}$ ..." und
aus `1.2`"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\texttt{rf2}\phi q\Box(\alpha)$ Funktion)"
folgt: $\texttt{rf2}\phi q\Box(\Omega)$ Funktion.

`18.5:` Aus `17`"... $\Omega \in \mathbb{N}$ ..." und
aus `2`"... $\mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box) = \mathbb{N}$"
folgt: $\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box)$.

...

...

Beweis **357-6** ...

$\boxed{\texttt{Thema16}}$ $(\gamma \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]))$.

...

`19.1`: Aus `18.3`"$1 + \Omega \in \mathbb{N}$" und
aus `1.2`"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\texttt{rf2}\phi q\Box(\alpha)$ Funktion)"
folgt: $\texttt{rf2}\phi q\Box(1+\Omega)$ Funktion.

`19.2`: Aus →)"$\Box$ Algebra in A",
aus `1.3`"$\texttt{rf2}\phi q\Box$ ist **ana2** von $\phi, q, \Box$",
aus `18.5`"$\Omega \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box)$" und
aus →)"$q \in A$"
folgt via **354-5**:
$$\mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box(\Omega)) = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega}).$$

`20`: Aus `17`"$\ldots \delta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$" und
aus `19.2`
folgt: $\delta \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box(\Omega))$.

`21`: Aus `1.3`"$\texttt{rf2}\phi q\Box$ ist **ana2** von $\phi, q, \Box$",
aus →)"ϕ Funktion",
aus →)"$\Box$ Algebra in A",
aus `18.4`"$\texttt{rf2}\phi q\Box(\Omega)$ Funktion",
aus `19.1`"$\texttt{rf2}\phi q\Box(1+\Omega)$ Funktion",
aus `Thema16`"$\gamma \in \phi^{-1}[A] \ldots$",
aus →)"$q \in A$",
aus `20`"$\delta \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf2}\phi q\Box(\Omega))$" und
aus `Thema16`"$\ldots \gamma \notin \delta \ldots$"
folgt via **357-5**:
$$\texttt{rf2}\phi q\Box(1+\Omega)(\{\gamma\} \cup \delta) = \texttt{rf2}\phi q\Box(\Omega)(\delta)\_\Box\_\phi(\gamma).$$

`22`: Aus `18.3`"$1 + \Omega \in \mathbb{N}$",
aus `18.2`"$\{\gamma\} \cup \delta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_{1+\Omega} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\Omega)})$" und
aus `Af)`"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}))) \Rightarrow (\left(q, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\beta) = \texttt{rf2}\phi q\Box(\alpha)(\beta))$"
folgt: $\left(q, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{\gamma\} \cup \delta) = \texttt{rf2}\phi q\Box(1+\Omega)(\{\gamma\} \cup \delta)$.

...

...

Beweis **357-6** ...

$\boxed{\texttt{Thema16}}$ $(\gamma \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]))$.

...

23.1: Aus 21 und
aus 22
folgt: $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)(\{\gamma\} \cup \delta) = \texttt{rf2}\phi q\square(\Omega)(\delta)\_\square\_\phi(\gamma)$.

23.2: Aus 17"... $\Omega \in \mathbb{N}$ ...",
aus 17"... $\delta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\Omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\Omega})$" und
aus Af)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})))$
$\Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)(\beta) = \texttt{rf2}\phi q\square(\alpha)(\beta))$"
folgt: $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)(\delta) = \texttt{rf2}\phi q\square(\Omega)(\delta)$.

24: Aus 23.1 und
aus 23.2
folgt: $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)(\{\gamma\} \cup \delta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)(\delta)\_\square\_\phi(\gamma)$.

Ergo Thema16:
$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])))$
$\Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)(\{\gamma\} \cup \delta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)(\delta)\_\square\_\phi(\gamma))$.

Konsequenz:

Ai) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])))$
$\Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{q,\square}\middle|\,\phi\right)(\beta)\_\square\_\phi(\alpha))$"

$\square$

Maßtheorie: $\left(\overset{\texttt{rek}}{q,\Box}\middle|\,\phi\right)$ als $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

Ersterstellung: 12/08/15 **Letzte Änderung: 14/12/15**

358-1. Zunächst wird **357-6** im Spezialfall $q = o$ ist $\Box$neutral auf A re-formuliert.

<u>**358-1(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow)$ ϕ *Funktion.*

$\rightarrow)$ $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow)$ A *Menge.*

$\rightarrow)$ $\Box$ *tunnelt rechts auf* A.

$\rightarrow)$ o *ist* $\Box$*neutral auf* A.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

b) $\mathsf{ran}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right) \subseteq A$.

c) $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$ *Funktion.*

d) $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$ *Relation.*

e) $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \to A$.

f) $\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha}))$
$\Rightarrow \quad \left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta) = \mathtt{rf}2\phi o\Box(\alpha)(\beta)$.

g) $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(0) = o$.

h) $\forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[A]) \Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha))$.

i) $\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]))$
$\Rightarrow \quad \left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta)\_\Box\_\phi(\alpha)$.

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **358-1**</u>

1: Aus →) "o ist $\Box$neutral auf A"
folgt via **208-1(Def)**: $(o \in A) \wedge (\forall \beta : (\beta \in A) \Rightarrow (\beta = \beta_{\_}\Box_{\_}o = o_{\_}\Box_{\_}\beta))$.

2: Aus →) "ϕ Funktion",
aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "A Menge",
aus →) "$\Box$ tunnelt rechts auf A" und
aus 1 "$o \in A \ldots$"
folgt via **357-6**:

$$\mathsf{dom}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\,\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$$

$$\wedge \quad \mathsf{ran}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\,\middle|\,\phi\right) \subseteq A$$

$$\wedge \quad \left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\,\middle|\,\phi\right) \text{ Funktion}$$

$$\wedge \quad \left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\,\middle|\,\phi\right) \text{ Relation}$$

$$\wedge \quad \left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\,\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \to A$$

$$\wedge \quad \forall \alpha, \beta : (\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_\alpha \setminus \mathcal{U}_{-1+\alpha})) \Rightarrow \left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\,\middle|\,\phi\right)(\beta) = \mathtt{rf2}\phi o\Box(\alpha)(\beta)$$

$$\wedge \quad \left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\,\middle|\,\phi\right)(0) = o$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in \phi^{-1}[A]) \Rightarrow (\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\,\middle|\,\phi\right)(\{\beta\}) = o_{\_}\Box_{\_}\phi(\beta))$$

$$\wedge \quad \forall \alpha, \beta : (\alpha \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])) \Rightarrow \left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\,\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta) = \left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\,\middle|\,\phi\right)(\beta)_{\_}\Box_{\_}\phi(\alpha).$$

...

Beweis **358-1** ...

`3.a):` Aus 2 folgt:
$$\mathsf{dom}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)=\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$$

`3.b):` Aus 2 folgt:
$$\mathsf{ran}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)\subseteq A.$$

`3.c):` Aus 2 folgt:
$$\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)\text{ Funktion.}$$

`3.d):` Aus 2 folgt:
$$\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)\text{ Relation.}$$

`3.e):` Aus 2 folgt:
$$\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right):\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])\to A.$$

`3.f):` Aus 2 folgt:
$$\forall\alpha,\beta:(\alpha\in\mathbb{N})\wedge(\beta\in\mathcal{P}(\phi^{-1}[A])\cap(\mathcal{U}_\alpha\setminus\mathcal{U}_{-1+\alpha}))$$
$$\Rightarrow\quad\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta)=\mathtt{rf}2\phi o\Box(\alpha)(\beta).$$

`3.g):` Aus 2 folgt:
$$\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0)=o.$$

...

Beweis **358-1** ...

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\alpha \in \phi^{-1}[A]$.

4: Aus →) "ϕ Funktion" und
aus Thema3.1 "$\alpha \in \phi^{-1}[A]$"
folgt via **18-29**: $\phi(\alpha) \in A$.

5: Aus 4 "$\phi(\alpha) \in A$" und
aus 1 "$\ldots \forall \beta : (\beta \in A) \Rightarrow (\beta = \beta{\_}\Box{\_}o = o{\_}\Box{\_}\beta)$"
folgt: $o{\_}\Box{\_}\phi(\alpha) = \phi(\alpha)$.

6: Aus Thema3.1 "$\alpha \in \phi^{-1}[A]$" und
aus 2 "$\ldots \forall \beta : (\beta \in \phi^{-1}[A])$
$\Rightarrow \left(\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Box} \middle| \, \phi\right)(\{\beta\}) = o{\_}\Box{\_}\phi(\beta)\right) \ldots$"
folgt: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Box} \middle| \, \phi\right)(\{\alpha\}) = o{\_}\Box{\_}\phi(\alpha)$.

7: Aus 5 und
aus 6
folgt: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Box} \middle| \, \phi\right)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha)$.

Ergo Thema3.1: $\boxed{\texttt{Ah)} \left| \text{ "}\forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[A]) \Rightarrow \left(\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Box} \middle| \, \phi\right)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha)\right)\text{"}\right.}$

3.i): Aus 2
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]))$
$\Rightarrow \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Box} \middle| \, \phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Box} \middle| \, \phi\right)(\beta){\_}\Box{\_}\phi(\alpha)$.

$\Box$

358-2. Der Nachweis von $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]) \subseteq \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), \Box, E)$ für geeignete $o, \Box, E$ wird in Einzelschritte zerlegt.

<u>**358-2(Satz)**</u> *Es gelte:*

→) ϕ *Funktion.*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) A *Menge.*

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf* A

→) o *ist* $\Box$*neutral auf* A.

→) $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

Dann folgt:

a) $0 \in \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)$.

b) $\forall \alpha, \beta :$
$$((\alpha \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]) \cap \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)))$$
$$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)).$$

c) $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]) \subseteq \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)$.

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

$$\mathsf{347.0}(x, E, M) = \{\omega : x(\omega \cup E)\_M\_x(\omega \cap E) = x(\omega)\_M\_x(E)\}$$

<u>Beweis **358-2**</u>

`1.1:` Aus →) “o ist $\Box$neutral auf A”
folgt via **208-1(Def)**: $\forall\gamma : (\gamma \in A) \Rightarrow (\gamma = \gamma_{\_}\Box_{\_}o = o_{\_}\Box_{\_}\gamma))$.

`1.2:` Aus →) “ϕ Funktion”,
aus →) “$\Box$ Algebra in A”,
aus →) “A Menge”,
aus →) “$\Box$ tunnelt rechts auf A” und
aus →) “o ist $\Box$neutral auf A”
folgt via **358-1**: $\forall\gamma : (\gamma \in \phi^{-1}[A]) \Rightarrow (\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{\gamma\}) = \phi(\gamma))$.

`1.3:` Aus →) “ϕ Funktion”,
aus →) “$\Box$ Algebra in A”,
aus →) “A Menge”,
aus →) “$\Box$ tunnelt rechts auf A” und
aus →) “o ist $\Box$neutral auf A”
folgt via **358-1**: $\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \to A$.

`1.4:` Aus →) “ϕ Funktion”,
aus →) “$\Box$ Algebra in A”,
aus →) “A Menge”,
aus →) “$\Box$ tunnelt rechts auf A” und
aus →) “o ist $\Box$neutral auf A”
folgt via **358-1**: $\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(0) = o$.

`1.5:` Aus →) “ϕ Funktion”,
aus →) “$\Box$ Algebra in A”,
aus →) “A Menge”,
aus →) “$\Box$ tunnelt rechts auf A” und
aus →) “o ist $\Box$neutral auf A”
folgt via **358-1**:
$\forall\gamma, \delta : ((\gamma \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])))$
$\Rightarrow (\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{\gamma\} \cup \delta) = \left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\delta)_{\_}\Box_{\_}\phi(\gamma))$.

`1.6:` Aus →) “$\Box$ Algebra in A”,
aus →) “o ist $\Box$neutral auf A” und
aus →) “$\Box$ tunnelt rechts auf A”
folgt via **347-4**: $\Box$ assoziativ auf A.

`1.7:` Aus →) “$\Box$ Algebra in A”
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$.

...

<u>Beweis</u> **358-2** ...

`1.8`: Aus →) "$\Box$ tunnelt rechts auf A"
folgt via **344-1(Def)**:
$$\forall\alpha,\beta,\gamma:(\alpha,\beta,\gamma\in A)\Rightarrow((\alpha{}_\Box{}\beta){}_\Box{}\gamma=(\alpha{}_\Box{}\gamma){}_\Box{}\beta).$$

`2.1`: Aus `1.3` "$\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right):\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])\to A$" und
aus →) "$E\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$"
folgt via **folk**: $\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E)\in A.$

`2.2`: Aus `1.8`
folgt:
$$\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha,\beta,\gamma\in A)\wedge(\alpha\neq\beta))\Rightarrow((\alpha{}_\Box{}\beta){}_\Box{}\gamma=(\alpha{}_\Box{}\gamma){}_\Box{}\beta).$$

`3.1`: Aus `2.1` "$\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E)\in A$" und
aus `1.1` "$\forall\gamma:(\gamma\in A)\Rightarrow(\gamma=\gamma{}_\Box{}o=o{}_\Box{}\gamma))$"
folgt: $\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E)=\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E){}_\Box{}o.$

`3.2`: Aus `2.1` "$\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E)\in A$" und
aus `1.1` "$\forall\gamma:(\gamma\in A)\Rightarrow(\gamma=\gamma{}_\Box{}o=o{}_\Box{}\gamma))$"
folgt: $\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E)=o{}_\Box{}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E).$

`4`:
$$\begin{aligned}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0\cup E){}_\Box{}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0\cap E)&\overset{\textbf{folk}}{=}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E){}_\Box{}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0\cap E)\\&\overset{\textbf{folk}}{=}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E){}_\Box{}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0)\\&\overset{1.4}{=}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E){}_\Box{}o\\&\overset{3.1}{=}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E)\\&\overset{3.2}{=}o{}_\Box{}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E)\\&\overset{1.4}{=}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0){}_\Box{}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E).\end{aligned}$$

`5.a)`: Aus `4` "$\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0\cup E){}_\Box{}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0\cap E)$
$=\ldots=\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0){}_\Box{}\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E)$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt **p.def.**: $0\in\mathsf{347.0}(\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right),E,\Box).$

...

<u>Beweis</u> **358-2** ...

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $(\alpha \in \phi^{-1}[A])$
$\wedge(\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]) \cap 347.0(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box))$.

`7.1:` Aus Thema6 “... $\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]) \cap 347.0(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)$”
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`7.2:` Aus Thema6 “... $\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]) \cap 347.0(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)$”
folgt via **folk**:
$(\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])) \wedge (\beta \in 347.0(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box))$.

`7.3:` Aus Thema6 “... $\alpha \notin \beta$ ...”
folgt via **2-3**: $\alpha \notin \beta \cap E$.

`7.4:` Aus 2.2 “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta, \gamma \in A) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta)$” und
aus 1.7 “$\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$”
folgt via **344-2**:
$$((\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta \cup E)\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta \cap E))\_\Box\_\phi(\alpha)$$
$$= ((\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta \cup E)\_\Box\_\phi(\alpha))\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta \cap E).$$

`7.5:` Aus 2.2 “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta, \gamma \in A) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta)$” und
aus 1.7 “$\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$”
folgt via **344-2**:
$$((\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta)\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E))\_\Box\_\phi(\alpha)$$
$$= ((\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta)\_\Box\_\phi(\alpha))\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E).$$

`7.6:` Aus Thema6 “... $\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$ ...” und
aus →) “$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$”
folgt via **32-5**: $\beta \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

...

...

Beweis **358-2** . . .

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $(\alpha \in \phi^{-1}[A])$
$\wedge(\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]) \cap \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right), E, \square)\,)$.

. . .

`7.7:` Aus →) "$\square$ Algebra in A" und
aus `1.6`"$\square$ assoziativ auf A"
folgt via **340-12**:
$$\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\beta \cup E)_{-}\square_{-}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\beta \cap E)_{-}\square_{-}\phi(\alpha))$$
$$= (\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\beta \cup E)_{-}\square_{-}\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\beta \cap E))_{-}\square_{-}\phi(\alpha).$$

`8.1:` Aus `7.2`"$\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])\ldots$"
folgt via **32-5**: $\beta \cap E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

`8.2:` Aus `7.2`"$\ldots\beta \in \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right), E, \square)$"
folgt **p.def.**:
$$\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\beta \cup E)_{-}\square_{-}\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\beta \cap E)$$
$$= \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\beta)_{-}\square_{-}\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(E).$$

`8.3:` Aus `7.1`"β Menge"
folgt via **2-28**: $\{\alpha\} \cup \beta$ Menge.

`8.4:` Aus `Thema6`"$\alpha \in \phi^{-1}[A]\ldots$",
aus `Thema6`"$\ldots\alpha \notin \beta\ldots$",
aus `7.2`"$\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]))\ldots$" und
aus `1.5`"$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])))$
$\Rightarrow (\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\{\gamma\} \cup \delta) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\delta)_{-}\square_{-}\phi(\gamma))$"
folgt: $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\beta)_{-}\square_{-}\phi(\alpha)$.

. . .

. . .

Beweis **358-2** ...

`Thema6` $(\alpha \in \phi^{-1}[A])$
$\wedge(\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \cap \mathtt{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)\,).$

...

9: Aus `Thema6` "$\alpha \in \phi^{-1}[A] \ldots$",
aus `7.3` "$\alpha \notin \beta \cap E$",
aus `8.1` "$\beta \cap E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$" und
aus `1.5` "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])))$
$\Rightarrow (\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\gamma\} \cup \delta) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\delta)\_\Box\_\phi(\gamma))$"
folgt:
$\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\} \cup (\beta \cap E)) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta \cap E)\_\Box\_\phi(\alpha).$

10: Es gilt: $(\alpha \in E) \vee (\alpha \notin E).$
`Fallunterscheidung`

...

...

Beweis **358-2** . . .

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $(\alpha \in \phi^{-1}[A])$
$\wedge(\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \cap \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)\,).$

. . .

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{10.1.Fall}}$ $\alpha \in E.$

11.1: Aus Thema6"$\ldots\alpha \notin \beta\ldots$" und
aus 10.1.Fall"$\alpha \in E$"
folgt via **347-5**: $(\{\alpha\} \cup \beta) \cup E = \beta \cup E.$

11.2: Aus Thema6"$\ldots\alpha \notin \beta\ldots$" und
aus 10.1.Fall"$\alpha \in E$"
folgt via **347-5**: $(\{\alpha\} \cup \beta) \cap E = \{\alpha\} \cup (\beta \cap E).$

12: $$\begin{aligned}
&\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)((\{\alpha\} \cup \beta) \cup E)_\Box_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)((\{\alpha\} \cup \beta) \cap E)\\
&\overset{11.1}{=} \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta \cup E)_\Box_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)((\{\alpha\} \cup \beta) \cap E)\\
&\overset{11.2}{=} \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta \cup E)_\Box_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\} \cup (\beta \cap E))\\
&\overset{9}{=} \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta \cup E)_\Box_(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta \cap E)_\Box_\phi(\alpha))\\
&\overset{7.7}{=} (\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta \cup E)_\Box_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta \cap E))_\Box_\phi(\alpha)\\
&\overset{8.2}{=} (\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta)_\Box_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E))_\Box_\phi(\alpha)\\
&\overset{7.5}{=} (\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta)_\Box_\phi(\alpha))_\Box_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E)\\
&\overset{8.4}{=} \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta)_\Box_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E).
\end{aligned}$$

13: Aus 12"$\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)((\{\alpha\} \cup \beta) \cup E)$
$\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)((\{\alpha\} \cup \beta) \cap E)$
$= \ldots = \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E)$" und
aus 8.3"$\{\alpha\} \cup \beta$ Menge"
folgt **p.def.**: $\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)\,.$

. . .

. . .

<u>Beweis</u> **358-2** ...

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $(\alpha \in \phi^{-1}[A])$
$\wedge(\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]) \cap 347.0(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box))$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{10.2.Fall}}$ $\alpha \notin E$.

`11.1:` Aus →) "... $\alpha \notin \beta$ ..." und
aus `9.2.Fall` "$\alpha \notin E$"
folgt via **2-3**: $\alpha \notin \beta \cup E$.

`11.2:` Aus `9.2.Fall` "$\alpha \notin E$"
folgt via **347-5**: $(\{\alpha\} \cup \beta) \cap E = \beta \cap E$.

`12:` Aus `Thema6` "$\alpha \in \phi^{-1}[A]$ ...",
aus `11.1` "$\alpha \notin \beta \cup E$",
aus `7.6` "$\beta \cup E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$" und
aus `1.5` "$\forall \gamma, \delta$:
$((\gamma \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])))$
$\Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\gamma\} \cup \delta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\delta)\_\Box\_\phi(\gamma))$"
folgt:
$\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\} \cup (\beta \cup E)) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta \cup E)\_\Box\_\phi(\alpha)$.

...

...

...

Beweis **358-2** ...

`Thema6`

$$(\alpha \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]) \cap \mathsf{347.0}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`10.2.Fall` $\alpha \notin E.$

...

13: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)((\{\alpha\}\cup\beta)\cup E)\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)((\{\alpha\}\cup\beta)\cap E)$

$\overset{\mathbf{AG}\cup}{=}$

$\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}\cup(\beta\cup E))\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)((\{\alpha\}\cup\beta)\cap E)$

$\overset{\mathsf{11.2}}{=}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}\cup(\beta\cup E))\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta\cap E)$

$\overset{\mathsf{12}}{=}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta\cup E)\_\Box\_\phi(\alpha))\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta\cap E)$

$\overset{\mathsf{7.4}}{=}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta\cup E)\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta\cap E))\_\Box\_\phi(\alpha)$

$\overset{\mathsf{8.2}}{=}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta)\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E))\_\Box\_\phi(\alpha)$

$\overset{\mathsf{7.5}}{=}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta)\_\Box\_\phi(\alpha))\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E)$

$\overset{\mathsf{8.4}}{=}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}\cup\beta)\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E).$

14: Aus 13“ $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)((\{\alpha\}\cup\beta)\cup E)$
$\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)((\{\alpha\}\cup\beta)\cap E)$
$=\ldots=\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}\cup\beta)\_\Box\_\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E)$” und
aus 8.3“ $\{\alpha\}\cup\beta$ Menge”
folgt **p.def.**: $\{\alpha\}\cup\beta \in \mathsf{347.0}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box).$

...

...

<u>Beweis</u> **358-2** ...

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $(\alpha \in \phi^{-1}[A])$
$\wedge(\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \cap \mathsf{347.0}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)\,).$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{347.0}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)\,.$

Ergo `Thema6`:

`Ab)` | "$\forall \alpha, \beta :$
$(\alpha \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \cap \mathsf{347.0}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)\,)$
$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{347.0}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)\,)$"

`7.c):` Aus `5.a)` "$0 \in \mathsf{347.0}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)$" und
aus `Ab)` "$\forall \alpha, \beta :$
$(\alpha \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \cap \mathsf{347.0}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)\,)$
$\Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \mathsf{347.0}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)\,)$"
folgt via **347-3**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \subseteq \mathsf{347.0}(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right), E, \Box)\,.$

$\square$

358-3. Gelegentlich ist $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$ ein $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

358-3(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) ϕ *Funktion.*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow$) A *Menge.*

$\rightarrow$) $\Box$ *tunnelt rechts auf* A..

$\rightarrow$) o *ist* $\Box$*neutral auf* A.

Dann folgt:

a) $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A]))$

$$\Rightarrow\left(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\alpha\cup\beta)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\alpha\cap\beta)\right.$$
$$\left.=\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\alpha)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta)\right).$$

b) $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$ *ist* $\Box$_*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **358-3**

$\mathsf{347.0}(x,E,M)=\{\omega:x(\omega\cup E)\_M\_x(\omega\cap E)=x(\omega)\_M\_x(E)\}$

...

<u>Beweis</u> **358-3** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$

2: Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus →) “ $\square$ Algebra in A ” ,
aus →) “ A Menge ” ,
aus →) “ $\square$ tunnelt rechts auf A ” ,
aus →) “ o ist $\square$neutral auf A ” und
aus `Thema1.1` “ $\ldots \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$ ”
folgt via **358-2**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \subseteq \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right), \beta, \square)$.

3: Aus `Thema1.1` “ $\alpha \ldots \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$ ” und
aus 2 “ $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \subseteq \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right), \beta, \square)$ ”
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right), \beta, \square)$.

4: Aus 3 “ $\alpha \in \mathsf{347.0}(\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right), \beta, \square)$ ”
folgt **p.def.**:

$$\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\alpha\cup\beta)_{-}\square_{-}\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\alpha\cap\beta) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\alpha)_{-}\square_{-}\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\beta).$$

Ergo `Thema1.1`:

`Aa)` “ $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]))$

$$\Rightarrow (\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\alpha\cup\beta)_{-}\square_{-}\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\alpha\cap\beta) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\alpha)_{-}\square_{-}\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\square}\,\middle|\,\phi\right)(\beta))$$ ”

...

<u>Beweis</u> **358-3** . . .

`1.2:` Aus →) “ϕ Funktion” ,
aus →) “$\Box$ Algebra in A” ,
aus →) “A Menge” ,
aus →) “$\Box$ tunnelt rechts auf A” ,
aus →) “o ist $\Box$neutral auf A” und
aus `Thema1.1` “$\ldots \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$”
folgt via **358-1**:

$$\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \, \phi \right) \text{ Funktion}$$

$$\wedge \quad \mathsf{dom} \left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \, \phi \right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$$

$$\wedge \quad \mathsf{ran} \left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \, \phi \right) \subseteq A$$

$$\wedge \quad \left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \, \phi \right)(0) = o.$$

`1.3:` Via **32-5** gilt: $$0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]).$$

. . .

<u>Beweis **358-3**</u> ...

2.1: Aus 1.2 "... $\mathsf{dom}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])\ldots$"

folgt via **folk**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \subseteq \mathsf{dom}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)$.

2.2: Aus 1.2 "... $\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0) = o$" und

aus →) "o ist $\Box$neutral auf A"

folgt: $\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0)$ ist $\Box$neutral auf A.

2.3: Via **8-10** gilt: $\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])] \subseteq \mathsf{ran}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)$.

3.1: Aus 1.2 "$\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)$ Funktion",

aus 1.3 "$0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$" und

aus 2.1 "... $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \subseteq \mathsf{dom}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)$"

folgt via **18-27**: $\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0) \in \left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])]$.

3.2: Aus 2.3 "$\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])] \subseteq \mathsf{ran}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)$" und

aus 1.2 "... $\mathsf{ran}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right) \subseteq A\ldots$"

folgt via **folk**: $\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])] \subseteq A$.

4: Aus 2.2 "$\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0)$ ist $\Box$neutral auf A",

aus 3.1 "$\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0) \in \left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])]$" und

aus 3.2 "$\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])] \subseteq A$"

folgt via **208-4**: $\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0)$ ist $\Box$neutral auf $\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])]$.

5.b): Aus 1.2 "$\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)$ Funktion...",

aus 2.1 "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \subseteq \mathsf{dom}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)$",

aus Aa) "$\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]))$

$$\Rightarrow \left(\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(\alpha\cup\beta)\_\Box\_\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(\alpha\cap\beta)\right.$$

$$\left. = \left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(\alpha)\_\Box\_\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(\beta)\right)$$" und

aus 4 "$\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(0)$ ist $\Box$neutral auf $\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)[\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])]$"

folgt via **347-8**: $\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

$\Box$

358-4. Gleichsam als Nebenprodukt soll nun $\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\square}\middle|\,\phi\right)(\{p,q\})$ unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen untersucht werden.

358-4(Satz) *Es gelte:*

→) ϕ *Funktion.*

→) $\square$ *Algebra in* A.

→) A *Menge.*

→) $\square$ *tunnelt rechts auf* A.

→) o *ist* $\square$*neutral auf* A.

→) $p,q\in\phi^{-1}[A]$.

→) $p\neq q$.

Dann folgt "$\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\square}\middle|\,\phi\right)(\{p,q\})=\phi(p)_{-}\square_{-}\phi(q)=\phi(q)_{-}\square_{-}\phi(p)$".

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **358-4**</u>

`1.1:` Aus →) “$p, q \in \phi^{-1}[A]$”
folgt via **223-1**: $\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

`1.2:` Aus →) “$p, q \in \phi^{-1}[A]$”
folgt via **32-5**: $\{p\}, \{q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

`1.3:` Aus →) “ϕ Funktion”,
aus →) “$\Box$ Algebra in A”,
aus →) “A Menge”,
aus →) “$\Box$ tunnelt rechts auf A” und
aus →) “o ist $\Box$neutral auf A”
folgt via **358-3**: $\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

`1.4:` Aus →) “ϕ Funktion”,
aus →) “$\Box$ Algebra in A”,
aus →) “A Menge”,
aus →) “$\Box$ tunnelt rechts auf A” und
aus →) “o ist $\Box$neutral auf A”
folgt via **358-1**: $\forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[A]) \Rightarrow (\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha))$.

`2.1:` Aus `1.2`“$\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)$ ist $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$”,
aus `1.2`“$\{p\}, \{q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$”,
aus `1.1`“$\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[A])$” und
aus →) “$p \neq q$”
folgt via **347-10**: $\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{p, q\}) = \left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{p\})\_\Box\_\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{q\})$
$= \left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{q\})\_\Box\_\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{p\})$.

`2.2:` Aus →) “$p \ldots \in \phi^{-1}[A]$” und
aus `1.4`“$\forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[A]) \Rightarrow (\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{\alpha\}) = \alpha)$”
folgt: $\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{p\}) = \phi(p)$.

`2.3:` Aus →) “$\ldots q \in \phi^{-1}[A]$” und
aus `1.4`“$\forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[A]) \Rightarrow (\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{\alpha\}) = \alpha)$”
folgt: $\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{q\}) = \phi(q)$.

`3:` Aus `2.1`,
aus `2.2` und
aus `2.3`
folgt: $\left(o, \overset{\texttt{rek}}{\Box} \middle| \phi\right)(\{p, q\}) = \phi(p)\_\Box\_\phi(q) = \phi(q)\_\Box\_\phi(p)$.

$\Box$

358-5. Nun soll **347-18** im Kontext von **347-9** eingesetzt werden.

358-5(Satz) *Es gelte:*

→) ϕ *Funktion.*

→) $\Box$ *Algebra in A.*

→) *A Menge.*

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf A.*

→) *o ist* $\Box$*neutral auf A.*

Dann folgt:

a) $\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E)\_\Box\_\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(D) = \left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(D)\_\Box\_\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E).$

b) $\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cup D)\_\Box\_\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cap D)$
$= \left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E)\_\Box\_\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(D).$

c) $\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cup D)\_\Box\_\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cap D)$
$= \left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(D)\_\Box\_\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E).$

d) $\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cap D)\_\Box\_\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cup D)$
$= \left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E)\_\Box\_\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(D).$

e) $\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cap D)\_\Box\_\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cup D)$
$= \left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(D)\_\Box\_\left(o,\overset{\texttt{rek}}{\Box}\middle|\,\phi\right)(E).$

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **358-5**</u>

1.1: Aus →) " ϕ Funktion" ,
aus →) " $\square$ Algebra in A" ,
aus →) " A Menge" ,
aus →) " $\square$ tunnelt rechts auf A" und
aus →) " o ist $\square$neutral auf A"
folgt via **358-1**: $\mathsf{dom}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\square}\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A).$

1.2: Aus →) " ϕ Funktion" ,
aus →) " $\square$ Algebra in A" ,
aus →) " A Menge" ,
aus →) " $\square$ tunnelt rechts auf A" und
aus →) " o ist $\square$neutral auf A"
folgt via **358-3**: $\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\square}\middle|\,\phi\right)$ ist $\square$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$.

1.3: Aus →) " $\square$ Algebra in A" ,
aus →) " o ist $\square$neutral auf A" und
aus →) " $\square$ tunnelt rechts auf A"
folgt via **347-4**: $\square$ assoziativ auf A.

2.1: Aus 1.2 und
aus 1.1
folgt: $\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\square}\middle|\,\phi\right)$ ist $\square$_Gewicht auf $\mathsf{dom}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\square}\middle|\,\phi\right)$.

2.2: Aus →) " ϕ Funktion" ,
aus →) " $\square$ Algebra in A" ,
aus →) " A Menge" ,
aus →) " $\square$ tunnelt rechts auf A" und
aus →) " o ist $\square$neutral auf A"
folgt via **358-1**: $\mathsf{ran}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\square}\middle|\,\phi\right) \subseteq A.$

3: Aus 1.3 " $\square$ assoziativ auf A" und
aus 2.2 " $\mathsf{ran}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\square}\middle|\,\phi\right) \subseteq A$"
folgt via **211-2**: $\square$ assoziativ auf $\mathsf{ran}\left(o,\overset{\mathtt{rek}}{\square}\middle|\,\phi\right)$.

...

<u>Beweis **358-5**</u> ...

`4.a):` Aus `2.1`“ $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$ ist $\Box$_Gewicht auf dom $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$” ,
aus `1.1`“dom $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$” und
aus `3`“ $\Box$ assoziativ auf ran $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$”
folgt via **347-18**:

$$\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(D) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(D)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E).$$

`4.b):` Aus `2.1`“ $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$ ist $\Box$_Gewicht auf dom $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$” ,
aus `1.1`“dom $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$” und
aus `3`“ $\Box$ assoziativ auf ran $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$”
folgt via **347-18**:

$$\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cup D)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cap D) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(D).$$

`4.c):` Aus `2.1`“ $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$ ist $\Box$_Gewicht auf dom $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$” ,
aus `1.1`“dom $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$” und
aus `3`“ $\Box$ assoziativ auf ran $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$”
folgt via **347-18**:

$$\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cup D)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cap D) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(D)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E).$$

`4.d):` Aus `2.1`“ $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$ ist $\Box$_Gewicht auf dom $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$” ,
aus `1.1`“dom $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$” und
aus `3`“ $\Box$ assoziativ auf ran $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$”
folgt via **347-18**:

$$\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cap D)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cup D) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(D).$$

`4.e):` Aus `2.1`“ $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$ ist $\Box$_Gewicht auf dom $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$” ,
aus `1.1`“dom $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$” und
aus `3`“ $\Box$ assoziativ auf ran $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)$”
folgt via **347-18**:

$$\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cap D)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E\cup D) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(D)\_\Box\_\left(\overset{\mathtt{rek}}{o,\Box}\middle|\,\phi\right)(E).$$

$\Box$

Algebra: $\Diamond = (\Box \downharpoonright Q \times Q)$ für $\Box$ Algebra in A und $\alpha{}_-\Box{}_-\beta \in Q$ für alle $\alpha, \beta \in Q$.

Ersterstellung: 12/08/15 **Letzte Änderung: 14/12/15**

359-1. Die Notation “$(\Box \downharpoonright Q \times Q)$”, die in **#348** verwendet wird, ist präzise, aber unhandlich. Eine vermutlich bessere Lesbarkeit wird durch die ansonsten wenig ansprechende Abkürzung $\Diamond = (\Box \downharpoonright Q \times Q)$ erreicht.

359-1(Satz) *Es gelte:*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_-\Box{}_-\beta \in Q)$.

→) $\Diamond = (\Box \downharpoonright Q \times Q)$.

Dann folgt:

a) $Q \subseteq A$.

b) $\Diamond$ *Algebra auf* Q.

c) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_-\Diamond{}_-\beta = \alpha{}_-\Box{}_-\beta)$.

d) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_-\Diamond{}_-\beta \in Q)$.

e) $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_-\Diamond{}_-(\beta{}_-\Diamond{}_-\gamma) = \alpha{}_-\Box{}_-(\beta{}_-\Box{}_-\gamma))$.

f) $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow ((\alpha{}_-\Diamond{}_-\beta){}_-\Diamond{}_-\gamma = (\alpha{}_-\Box{}_-\beta){}_-\Box{}_-\gamma)$.

ALG-**Notation**.

<u>Beweis **359-1**</u>

1: Aus →) “ $\square$ Algebra in A ” und
aus →) “ $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha_-\square_-\beta\in Q)$ ”
folgt via **348-4**:

$$Q\subseteq A$$

$$\wedge\qquad(\square\downharpoonleft Q\times Q)\text{ Algebra in }Q$$

$$\wedge\qquad\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha_-(\square\downharpoonleft Q\times Q)_-\beta=\alpha_-\square_-\beta)$$

$$\wedge\qquad\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha_-(\square\downharpoonleft Q\times Q)_-\beta\in Q)$$

$$\wedge\qquad\forall\alpha,\beta,\gamma:(\alpha,\beta,\gamma\in Q)\Rightarrow(\alpha_-(\square\downharpoonleft Q\times Q)_-(\beta_-(\square\downharpoonleft Q\times Q)_-\gamma = \alpha_-\square_-(\beta_-\square_-\gamma)))$$

$$\wedge\qquad\forall\alpha,\beta,\gamma:(\alpha,\beta,\gamma\in Q)\Rightarrow((\alpha_-(\square\downharpoonleft Q\times Q)_-\beta)_-(\square\downharpoonleft Q\times Q)_-\gamma) = (\alpha_-\square_-\beta)_-\square_-\gamma.$$

2: Aus 1 und
aus →) “ $\diamondsuit=(\square\downharpoonleft Q\times Q)$ ”
folgt:

$$Q\subseteq A$$

$$\wedge\qquad\diamondsuit\text{ Algebra in }Q$$

$$\wedge\qquad\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha_-\diamondsuit_-\beta=\alpha_-\square_-\beta)$$

$$\wedge\qquad\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha_-\diamondsuit_-\beta\in Q)$$

$$\wedge\qquad\forall\alpha,\beta,\gamma:(\alpha,\beta,\gamma\in Q)\Rightarrow(\alpha_-\diamondsuit_-(\beta_-\diamondsuit_-\gamma)=\alpha_-\square_-(\beta_-\square_-\gamma))$$

$$\wedge\qquad\forall\alpha,\beta,\gamma:(\alpha,\beta,\gamma\in Q)\Rightarrow((\alpha_-\diamondsuit_-\beta)_-\diamondsuit_-\gamma=(\alpha_-\square_-\beta)_-\square_-\gamma).$$

...

<u>Beweis</u> **<u>359-1</u>** ...

`3.a):` Aus 2
folgt: $Q \subseteq A.$

`3.b):` Aus 2
folgt: $\diamondsuit$ Algebra in Q.

`3.c):` Aus 2
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_-\diamondsuit_-\beta = \alpha_-\Box_-\beta).$

`3.d):` Aus 2
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_-\diamondsuit_-\beta \in Q).$

`3.e):` Aus 2
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow (\alpha_-\diamondsuit_-(\beta_-\diamondsuit_-\gamma) = \alpha_-\Box_-(\beta_-\Box_-\gamma)).$

`3.f):` Aus 2
folgt: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow ((\alpha_-\diamondsuit_-\beta)_-\diamondsuit_-\gamma = (\alpha_-\Box_-\beta)_-\Box_-\gamma).$

$\Box$

359-2. Auch **348-5** nimmt mit der Abkürzung $\Diamond = (\Box \downharpoonright Q \times Q)$ ansprechendere Form an

359-2(Satz) *Aus ...*

$\rightarrow)$ $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)$.

$\rightarrow)$ $\Diamond = (\Box \downharpoonright Q \times Q)$.

a) *... und "o ist $\Box$neutral auf Q" folgt "o ist $\Diamond$neutral auf Q".*

b) *... und "o ist $\Box$neutral auf A" und "$o \in Q$" folgt "o ist $\Diamond$neutral auf Q".*

c) *... und "$\Box$ kommutativ auf Q" folgt "$\Diamond$ kommutativ auf Q".*

d) *... und "$\Box$ kommutativ auf A" folgt "$\Diamond$ kommutativ auf Q".*

e) *... und "$\Box$ assoziativ auf Q" folgt "$\Diamond$ assoziativ auf Q".*

f) *... und "$\Box$ assoziativ auf A" folgt "$\Diamond$ assoziativ auf Q".*

g) *... und "$\Box$ tunnelt rechts auf Q" folgt "$\Diamond$ tunnelt rechts auf Q".*

h) *... und "$\Box$ tunnelt rechts auf A" folgt "$\Diamond$ tunnelt rechts auf Q".*

ALG-**Notation**.

<u>Beweis</u> **359-2** `a)`

`VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_ \Box \_ \beta \in Q))$
$\wedge(\diamondsuit = (\Box \downharpoonright Q \times Q)) \wedge (o \text{ ist } \Box\text{neutral auf } Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_ \Box \_ \beta \in Q)) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots o$ ist $\Box$neutral auf Q"
folgt via **348-5**: o ist $(\Box \downharpoonright Q \times Q)$neutral auf Q.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \diamondsuit = (\Box \downharpoonright Q \times Q) \ldots$"
folgt: o ist $\diamondsuit$neutral auf Q.

`b)`

`VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_ \Box \_ \beta \in Q))$
$\wedge(\diamondsuit = (\Box \downharpoonright Q \times Q)) \wedge (o \text{ ist } \Box\text{neutral auf } A) \wedge (o \in Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_ \Box \_ \beta \in Q)) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots o$ ist $\Box$neutral auf $A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots o \in Q$"
folgt via **348-5**: o ist $(\Box \downharpoonright Q \times Q)$neutral auf Q.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \diamondsuit = (\Box \downharpoonright Q \times Q) \ldots$"
folgt: o ist $\diamondsuit$neutral auf Q.

`c)`

`VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_ \Box \_ \beta \in Q))$
$\wedge(\diamondsuit = (\Box \downharpoonright Q \times Q)) \wedge (\Box \text{ kommutativ auf } Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_ \Box \_ \beta \in Q)) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ kommutativ auf Q"
folgt via **348-5**: $(\Box \downharpoonright Q \times Q)$ kommutativ auf Q.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \diamondsuit = (\Box \downharpoonright Q \times Q) \ldots$"
folgt: $\diamondsuit$ kommutativ auf Q.

Beweis **359-2** `d)`

`VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_\square\_ \beta \in Q))$
$\wedge(\diamondsuit = (\square \rfloor Q \times Q)) \wedge (\square \text{ kommutativ auf } A).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in A …",
aus `VS` gleich "… $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_\square\_ \beta \in Q))$ …" und
aus `VS` gleich "… $\square$ kommutativ auf A"
folgt via **348-5**: $(\square \rfloor Q \times Q)$ kommutativ auf Q.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "… $\diamondsuit = (\square \rfloor Q \times Q)$ …"
folgt: $\diamondsuit$ kommutativ auf Q.

`e)`

`VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_\square\_ \beta \in Q))$
$\wedge(\diamondsuit = (\square \rfloor Q \times Q)) \wedge (\square \text{ assoziativ auf } Q).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in A …",
aus `VS` gleich "… $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_\square\_ \beta \in Q))$ …" und
aus `VS` gleich "… $\square$ assoziativ auf Q"
folgt via **348-5**: $(\square \rfloor Q \times Q)$ assoziativ auf Q.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "… $\diamondsuit = (\square \rfloor Q \times Q)$ …"
folgt: $\diamondsuit$ assoziativ auf Q.

`f)`

`VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_\square\_ \beta \in Q))$
$\wedge(\diamondsuit = (\square \rfloor Q \times Q)) \wedge (\square \text{ assoziativ auf } A).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in A …",
aus `VS` gleich "… $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_\square\_ \beta \in Q))$ …" und
aus `VS` gleich "… $\square$ assoziativ auf A"
folgt via **348-5**: $(\square \rfloor Q \times Q)$ assoziativ auf Q.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "… $\diamondsuit = (\square \rfloor Q \times Q)$ …"
folgt: $\diamondsuit$ assoziativ auf Q.

<u>Beweis</u> **359-2** `g)`

`VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q))$
$\wedge(\Diamond = (\Box \restriction Q \times Q)) \wedge (\Box \text{ tunnelt rechts auf } Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ tunnelt rechts auf Q"
folgt via **348-5**: $(\Box \restriction Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \Diamond = (\Box \restriction Q \times Q) \ldots$"
folgt: $\Diamond$ tunnelt rechts auf Q.

`h)`

`VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q))$
$\wedge(\Diamond = (\Box \restriction Q \times Q)) \wedge (\Box \text{ tunnelt rechts auf } A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ tunnelt rechts auf A"
folgt via **348-5**: $(\Box \restriction Q \times Q)$ tunnelt rechts auf Q.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \Diamond = (\Box \restriction Q \times Q) \ldots$"
folgt: $\Diamond$ tunnelt rechts auf Q.

$\Box$

359-3. Nun wird **348-10** ein wenig umgeschrieben.

359-3(Satz) *Es gelte:*

→) $\square$ *Algebra in* A.

→) o *ist* $\square$*neutral auf* A.

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_{\_}\square_{\_}\beta \in Q)$.

→) $\square$ *tunnelt rechts auf* Q.

→) $o \in Q$ *Menge.*

→) $\diamondsuit = (\square \downharpoonright Q \times Q)$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

b) $\mathsf{ran}\,(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit}) \subseteq Q$.

c) $o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit}$ *Relation.*

d) $o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit}$ *Funktion.*

e) $o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \to Q$.

f) $o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit}$ *ist* $\square_{\_}$*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$.

g) $(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(0) = o$.

h) $\forall \alpha : (\alpha \in Q) \Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\{\alpha\}) = \alpha)$.

...

ALG-**Notation**.

359-3(Satz) *Es gelte:*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) o *ist* $\Box$*neutral auf* A.

→) $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)$.

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf* Q

→) $o \in Q$ *Menge*.

→) $\diamondsuit = (\Box \downharpoonleft Q \times Q)$.

Dann folgt:

...

i) $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$
$$\Rightarrow ((o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(\alpha)\_\diamondsuit\_(o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(\beta) = (o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(\alpha)\_\Box\_(o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(\beta)).$$

j) $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in Q) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(\{\alpha,\beta\}) = \alpha\_\Box\_\beta)$.

k) $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in Q) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)))$
$$\Rightarrow ((o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(\{\alpha\} \cup \beta) = (o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(\beta)\_\Box\_\alpha).$$

l) $(o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(E)\_\Box\_(o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(D) = (o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(D)\_\Box\_(o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(E)$.

m) $(o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(E \cup D)\_\Box\_(o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(E \cap D) = (o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(E))\_\Box\_(o,\overset{\text{fin}}{\diamondsuit})(D)$.

ALG-**Notation**.

Beweis **359-3**

1: Aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "o ist $\Box$neutral auf A",
aus →) "$\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)$",
aus →) "$\Box$ tunnelt rechts auf Q" und
aus →) "$o \in Q$ Menge"
folgt via **348-10**:

...

Beweis **359-3** . . .

1: . . .

$$\mathsf{dom}\,(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})=\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$$

$$\wedge\qquad\mathsf{ran}\,(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})\subseteq Q$$

$$\wedge\qquad\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}}\text{ Relation}$$

$$\wedge\qquad\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}}\text{ Funktion}$$

$$\wedge\qquad\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}}\colon\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)\to Q.$$

$$\wedge\qquad\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}}\text{ ist }\Box\text{\_Gewicht auf }\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$$

$$\wedge\qquad(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(0)=o$$

$$\wedge\qquad\forall\alpha:(\alpha\in Q)\Rightarrow(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\{\alpha\})=\alpha)$$

$$\wedge\qquad\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))$$
$$\Rightarrow((\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\alpha)_{-}(\Box\downharpoonright Q\times Q)_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\beta)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\alpha)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\beta))$$

$$\wedge\qquad\forall\alpha,\beta:((\alpha,\beta\in Q)\wedge(\alpha\neq\beta))\Rightarrow(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}}(\{\alpha,\beta\})=\alpha_{-}\Box_{-}\beta)$$

$$\wedge\qquad\forall\alpha,\beta:((\alpha\in Q)\wedge(\alpha\notin\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)))$$
$$\Rightarrow((\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\{\alpha\}\cup\beta)=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(\beta)_{-}\Box_{-}\alpha)$$

$$\wedge\qquad(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E)$$

$$\wedge\qquad(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E\cup D)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E\cap D)$$
$$=(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(E)_{-}\Box_{-}(\overbrace{o,(\Box\downharpoonright Q\times Q)}^{\texttt{fin}})(D).$$

. . .

<u>Beweis</u> **359-3** . . .

2: Aus →) “ $\diamondsuit = (\square \restriction Q \times Q)$ ” und aus 1

folgt:

$$\mathsf{dom}\,(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit}) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$$

$$\wedge \quad \mathsf{ran}\,(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit}) \subseteq Q$$

$$\wedge \quad o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit} \text{ Relation}$$

$$\wedge \quad o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit} \text{ Funktion}$$

$$\wedge \quad o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit} : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q) \to Q$$

$$\wedge \quad o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit} \text{ ist } \square\text{\_Gewicht auf } \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)$$

$$\wedge \quad (o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(0) = o$$

$$\wedge \quad \forall \alpha : (\alpha \in Q) \Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\{\alpha\}) = \alpha)$$

$$\wedge \quad \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q)) \Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\alpha)\_\diamondsuit\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\beta) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\alpha)\_\square\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\beta))$$

$$\wedge \quad \forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in Q) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\{\alpha, \beta\}) = \alpha\_\square\_\beta)$$

$$\wedge \quad \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in Q) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Q))) \Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\{\alpha\} \cup \beta) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\beta)\_\square\_\alpha)$$

$$\wedge \quad (o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(E)\_\square\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(D) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(D)\_\square\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(E)$$

$$\wedge \quad (o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(E \cup D)\_\square\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(E \cap D) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(E)\_\square\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(D).$$

. . .

Beweis **359-3** ...

3.a): Aus 2 folgt:
$$\mathsf{dom}\,(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit}) = \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q).$$

3.b): Aus 2 folgt:
$$\mathsf{ran}\,(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit}) \subseteq Q.$$

3.c): Aus 2 folgt:
$$o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit} \text{ Relation.}$$

3.d): Aus 2 folgt:
$$o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit} \text{ Funktion.}$$

3.e): Aus 2 folgt:
$$o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit} : \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q) \to Q.$$

3.f): Aus 2 folgt:
$$o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit} \text{ ist } \square\text{\_Gewicht auf } \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q).$$

3.g): Aus 2 folgt:
$$(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(0) = o.$$

3.h): Aus 2 folgt:
$$\forall \alpha : (\alpha \in Q) \Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\{\alpha\}) = \alpha).$$

3.i): Aus 2 folgt:
$$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q))$$
$$\Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\alpha)\_\diamondsuit\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\beta) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\alpha)\_\square\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\beta)).$$

3.j): Aus 2 folgt:
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in Q) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\{\alpha, \beta\}) = \alpha\_\square\_\beta).$$

3.k): Aus 2 folgt:
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in Q) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(Q)))$$
$$\Rightarrow ((o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\{\alpha\} \cup \beta) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(\beta)\_\square\_\alpha).$$

3.l): Aus 2 folgt:
$$(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(E)\_\square\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(D) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(D)\_\square\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(E).$$

3.m): Aus 2 folgt:
$$(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(E \cup D)\_\square\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(E \cap D) = (o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(E)\_\square\_(o, \overset{\mathsf{fin}}{\diamondsuit})(D).$$

$\square$

359-4. Von **359-3** ist auch eine "$\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)$-Version" verfügbar. Die Beweis-Reihenfolge ist `abdde) - gh) - i) - jklm) - f)`.

359-4(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) ϕ *Funktion.*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow$) o *ist* $\Box$*neutral auf* A.

$\rightarrow$) $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta\in Q) \Rightarrow (\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\beta\in Q)$.

$\rightarrow$) $\Box$ *tunnelt rechts auf* Q.

$\rightarrow$) $o\in Q$ *Menge.*

$\rightarrow$) $\diamondsuit = (\Box\restriction Q\times Q)$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

b) $\mathsf{ran}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right) \subseteq Q$.

c) $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)$ *Relation.*

d) $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)$ *Funktion.*

e) $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \to Q$.

f) $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)$ *ist* $\Box{}_{-}$*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

g) $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(0) = o$.

...

`ALG`-**Notation**.

359-4(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) ϕ *Funktion.*

$\rightarrow$) $\square$ *Algebra in* A.

$\rightarrow$) o *ist* $\square$*neutral auf* A.

$\rightarrow$) $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in Q)\Rightarrow(\alpha_-\square_-\beta\in Q)$.

$\rightarrow$) $\square$ *tunnelt rechts auf* Q.

$\rightarrow$) $o\in Q$ *Menge.*

$\rightarrow$) $\diamondsuit=(\square\restriction Q\times Q)$.

Dann folgt:

...

h) $\forall\alpha:(\alpha\in\phi^{-1}[Q])\Rightarrow(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\})=\phi(\alpha))$.

i) $$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]))\Rightarrow(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\alpha)_-\diamondsuit_-\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\beta)$$
$$=\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\alpha)_-\square_-\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\beta)).$$

j) $$\forall\alpha,\beta:((\alpha,\beta\in Q)\wedge(\alpha\neq\beta))$$
$$\Rightarrow(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha,\beta\})=\phi(\alpha)_-\square_-\phi(\beta)).$$

k) $$\forall\alpha,\beta:((\alpha\in Q)\wedge(\alpha\notin\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])))$$
$$\Rightarrow(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}\cup\beta)=\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\beta)_-\square_-\phi(\alpha)).$$

...

`ALG`-**Notation**.

359-4(Satz) *Es gelte:*

→) ϕ *Funktion.*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) o *ist* $\Box$*neutral auf* A.

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_{-}\Box{}_{-}\beta \in Q)$.

→) $\Box$ *tunnelt rechts auf* Q.

→) $o \in Q$ *Menge.*

→) $\Diamond = (\Box \restriction Q \times Q)$.

Dann folgt:

...

`l)` $$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Diamond}\middle| \phi\right)(E){}_{-}\Box{}_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Diamond}\middle| \phi\right)(D) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Diamond}\middle| \phi\right)(D){}_{-}\Box{}_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Diamond}\middle| \phi\right)(E).$$

`m)` $$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Diamond}\middle| \phi\right)(E \cup D){}_{-}\Box{}_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Diamond}\middle| \phi\right)(E \cap D) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Diamond}\middle| \phi\right)(E)){}_{-}\Box{}_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \Diamond}\middle| \phi\right)(D).$$

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **359-4**</u>

`1.1:` Aus →) “ $\Box$ Algebra in A ” ,
aus →) “ $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_{\text{-}}\Box{}_{\text{-}}\beta \in Q)$ ” und
aus →) “ $\Diamond = (\Box \downharpoonright Q \times Q)$ ”
folgt via **359-1**: $\Diamond$ Algebra in Q.

`1.2:` Aus →) “ $\Box$ Algebra in A ” ,
aus →) “ $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_{\text{-}}\Box{}_{\text{-}}\beta \in Q)$ ” ,
aus →) “ o ist $\Box$neutral auf A ” ,
aus →) “ $o \in Q \ldots$ ” und
aus →) “ $\Diamond = (\Box \downharpoonright Q \times Q)$ ”
folgt via **359-2**: o ist $\Diamond$neutral auf Q.

`1.3:` Aus →) “ $\Box$ Algebra in A ” ,
aus →) “ $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_{\text{-}}\Box{}_{\text{-}}\beta \in Q)$ ” ,
aus →) “ $\Box$ tunnelt rechts auf Q ” und
aus →) “ $\Diamond = (\Box \downharpoonright Q \times Q)$ ”
folgt via **359-2**: $\Diamond$ tunnelt rechts auf Q.

`1.4:` Aus →) “ $\Box$ Algebra in A ” ,
aus →) “ $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_{\text{-}}\Box{}_{\text{-}}\beta \in Q)$ ” und
aus →) “ $\Diamond = (\Box \downharpoonright Q \times Q)$ ”
folgt via **359-1**: $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in Q) \Rightarrow (\alpha{}_{\text{-}}\Diamond{}_{\text{-}}\beta = \alpha{}_{\text{-}}\Box{}_{\text{-}}\beta)$.

`2.a):` Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus `1.1` “ $\Diamond$ Algebra in Q ” ,
aus →) “ $\ldots Q$ Menge ” ,
aus `1.2` “ o ist $\Diamond$neutral auf Q ” und
aus `1.3` “ $\Diamond$ tunnelt rechts auf Q ”
folgt via **358-1**: $\mathsf{dom}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\,\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

`2.b):` Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus `1.1` “ $\Diamond$ Algebra in Q ” ,
aus →) “ $\ldots Q$ Menge ” ,
aus `1.2` “ o ist $\Diamond$neutral auf Q ” und
aus `1.3` “ $\Diamond$ tunnelt rechts auf Q ”
folgt via **358-1**: $\mathsf{ran}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\,\middle|\,\phi\right) \subseteq Q$.

...

<u>Beweis</u> **359-4** . . .

`2.c):` Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus `1.1` “ $\diamondsuit$ Algebra in Q ” ,
aus →) “ . . . Q Menge ” ,
aus `1.2` “ o ist $\diamondsuit$neutral auf Q ” und
aus `1.3` “ $\diamondsuit$ tunnelt rechts auf Q ”
folgt via **358-1**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)$ Relation.

`2.d):` Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus `1.1` “ $\diamondsuit$ Algebra in Q ” ,
aus →) “ . . . Q Menge ” ,
aus `1.2` “ o ist $\diamondsuit$neutral auf Q ” und
aus `1.3` “ $\diamondsuit$ tunnelt rechts auf Q ”
folgt via **358-1**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)$ Funktion.

`2.e):` Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus `1.1` “ $\diamondsuit$ Algebra in Q ” ,
aus →) “ . . . Q Menge ” ,
aus `1.2` “ o ist $\diamondsuit$neutral auf Q ” und
aus `1.3` “ $\diamondsuit$ tunnelt rechts auf Q ”
folgt via **358-1**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \to Q.$

`2.g):` Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus `1.1` “ $\diamondsuit$ Algebra in Q ” ,
aus →) “ . . . Q Menge ” ,
aus `1.2` “ o ist $\diamondsuit$neutral auf Q ” und
aus `1.3` “ $\diamondsuit$ tunnelt rechts auf Q ”
folgt via **358-1**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(0) = o.$

`2.h):` Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus `1.1` “ $\diamondsuit$ Algebra in Q ” ,
aus →) “ . . . Q Menge ” ,
aus `1.2` “ o ist $\diamondsuit$neutral auf Q ” und
aus `1.3` “ $\diamondsuit$ tunnelt rechts auf Q ”
folgt via **358-1**: $\forall\alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[Q]) \Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha)).$

. . .

Beweis **359-4** ...

`2.1:` Aus →) "ϕ Funktion",
aus `1.1` "$\Diamond$ Algebra in Q",
aus →) "... Q Menge",
aus `1.2` "o ist $\Diamond$neutral auf Q" und
aus `1.3` "$\Diamond$ tunnelt rechts auf Q"
folgt via **358-3**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\middle|\,\phi\right)$ ist $\Diamond$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

`2.2:` Aus →) "ϕ Funktion",
aus `1.1` "$\Diamond$ Algebra in Q",
aus →) "... Q Menge",
aus `1.2` "o ist $\Diamond$neutral auf Q" und
aus `1.3` "$\Diamond$ tunnelt rechts auf Q"
folgt via **358-1**:

$$\forall\alpha,\beta:((\alpha\in\phi^{-1}[Q])\wedge(\alpha\notin\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])))$$
$$\Rightarrow\left(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}\cup\beta)=\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\middle|\,\phi\right)(\beta)_{-}\Diamond_{-}\phi(\alpha)\right).$$

`2.3:` Aus →) "ϕ Funktion",
aus `1.1` "$\Diamond$ Algebra in Q",
aus →) "... Q Menge",
aus `1.2` "o ist $\Diamond$neutral auf Q" und
aus `1.3` "$\Diamond$ tunnelt rechts auf Q"
folgt via **358-5**:

$$\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\middle|\,\phi\right)(E)_{-}\Diamond_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\middle|\,\phi\right)(D)=\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\middle|\,\phi\right)(D)_{-}\Diamond_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\middle|\,\phi\right)(E).$$

`2.4:` Aus →) "ϕ Funktion",
aus `1.1` "$\Diamond$ Algebra in Q",
aus →) "... Q Menge",
aus `1.2` "o ist $\Diamond$neutral auf Q" und
aus `1.3` "$\Diamond$ tunnelt rechts auf Q"
folgt via **358-5**:

$$\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\middle|\,\phi\right)(E\cup D)_{-}\Diamond_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\middle|\,\phi\right)(E\cap D)$$
$$=\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\middle|\,\phi\right)(E)_{-}\Diamond_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\Diamond}\middle|\,\phi\right)(D).$$

Beweis **359-4** . . .

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $\gamma,\delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

`4.1:` Aus `Thema3`" $\gamma \ldots \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$ " und
aus `2.e)` " $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \to Q$ "
folgt via **folk**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\gamma) \in Q$.

`4.2:` Aus `Thema3`" $\ldots \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$ " und
aus `2.e)` " $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \to Q$ "
folgt via **folk**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\delta) \in Q$.

`5:` Aus `4.1`,
aus `4.2` und
aus `1.4`
folgt:

$$\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\gamma)_{-}\diamondsuit_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\delta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\gamma)_{-}\square_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\delta).$$

Ergo `Thema3`:

$$\forall\gamma,\delta : (\gamma,\delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \Rightarrow \left(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\gamma)_{-}\diamondsuit_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\delta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\gamma)_{-}\square_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\delta)\right).$$

Konsequenz:

`Ai)` " $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \Rightarrow \left(\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\alpha)_{-}\diamondsuit_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\beta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\alpha)_{-}\square_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o,\diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(\beta)\right)$ "

Beweis **359-4** ...

$\boxed{\texttt{Thema4.1}}$ $(\gamma, \delta, \gamma \cup \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)$.

`5.1:` Aus `Thema4.1`"$\gamma, \delta \ldots \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \ldots$" und
aus `Ai)`
folgt:

$$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\gamma)_{-}\diamondsuit_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\delta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\gamma)_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\delta).$$

`5.2:` Aus `2.1`"$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)$ ist $\diamondsuit_{-}$Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q])$" und
aus `Thema4.1`"$(\gamma, \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)$"
folgt via **348-7**:

$$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\gamma \cup \delta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\gamma)_{-}\diamondsuit_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\delta).$$

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt:

$$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\gamma \cup \delta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\gamma)_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\delta).$$

Ergo `Thema4.1`:

`A1` | "$\forall \gamma, \delta : (\gamma, \delta, \gamma \cup \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)$

$$\Rightarrow \quad \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\gamma \cup \delta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\gamma)_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(\delta)"$$

...

Beweis **359-4** ...

$\boxed{\texttt{Thema4.2}}$ $(\gamma, \delta \in \phi^{-1}[Q]) \wedge (\gamma \neq \delta)$.

`5.1:` Aus →) "ϕ Funktion",
aus `1.1` "$\diamondsuit$ Algebra in Q",
aus →) "... Q Menge",
aus `1.3` "$\diamondsuit$ tunnelt rechts auf Q",
aus `1.2` "o ist $\diamondsuit$neutral auf Q",
aus `Thema4.2` "$\gamma, \delta \in \phi^{-1}[Q] \ldots$" und
aus `Thema4.2` "$\gamma \neq \delta$"
folgt via **358-4**: $\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(\{\gamma, \delta\}) = \phi(\gamma)_{-}\diamondsuit_{-}\phi(\delta)$.

`5.2:` Aus →) "ϕ Funktion" und
aus `Thema4.2` "$\gamma \ldots \in \phi^{-1}[Q] \ldots$"
folgt via **18-29**: $\phi(\gamma) \in Q$.

`5.3:` Aus →) "ϕ Funktion" und
aus `Thema4.2` "$\ldots \delta \in \phi^{-1}[Q] \ldots$"
folgt via **18-29**: $\phi(\delta) \in Q$.

`6:` Aus `5.2` "$\phi(\gamma) \in Q$",
aus `5.3` "$\phi(\delta) \in Q$" und
aus `1.4`
folgt: $\phi(\gamma)_{-}\diamondsuit_{-}\phi(\delta) = \phi(\gamma)_{-}\Box_{-}\phi(\delta)$.

`7:` Aus `5.1` und
aus `6`
folgt: $\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(\{\gamma, \delta\}) = \phi(\gamma)_{-}\Box_{-}\phi(\delta)$.

Ergo `Thema4.2`:

$$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \phi^{-1}[Q]) \wedge (\gamma \neq \delta)) \Rightarrow (\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(\{\gamma, \delta\}) = \phi(\gamma)_{-}\Box_{-}\phi(\delta))$$

Konsequenz:

`Aj)` "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \phi^{-1}[Q]) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow (\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(\{\alpha, \beta\}) = \phi(\alpha)_{-}\Box_{-}\phi(\beta))$"

...

<u>Beweis</u> **<u>359-4</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema4.3}}$ $(\gamma \in \phi^{-1}[Q]) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]))$

`5.1:` Aus `Thema4.3` "$(\gamma \in \phi^{-1}[Q])$
$\wedge(\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]))$" und
aus `2.2`
folgt: $\left(\begin{array}{c|c} \overset{\mathtt{rek}}{o,\Diamond} & \phi \end{array}\right)(\{\gamma\} \cup \delta) = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\mathtt{rek}}{o,\Diamond} & \phi \end{array}\right)(\delta)\_\Diamond\_\phi(\gamma).$

`5.2:` Aus `Thema4.3` "$\ldots \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$" und
aus `2.e)` "$\left(\begin{array}{c|c} \overset{\mathtt{rek}}{o,\Diamond} & \phi \end{array}\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \to Q$"
folgt via **folk**: $\left(\begin{array}{c|c} \overset{\mathtt{rek}}{o,\Diamond} & \phi \end{array}\right)(\delta) \in Q.$

`5.3:` Aus $\rightarrow\!)$ "ϕ Funktion" und
aus `Thema4.3` "$\gamma \in \phi^{-1}[Q] \ldots$"
folgt via **18-29**: $\phi(\gamma) \in Q.$

`6:` Aus `5.3`,
aus `5.2` und
aus `1.4`
folgt: $\phi(\gamma)\_\Diamond\_\left(\begin{array}{c|c} \overset{\mathtt{rek}}{o,\Diamond} & \phi \end{array}\right)(\delta) = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\mathtt{rek}}{o,\Diamond} & \phi \end{array}\right)(\delta)\_\Box\_\phi(\gamma).$

`7:` Aus `5.1` und
aus `6`
folgt: $\left(\begin{array}{c|c} \overset{\mathtt{rek}}{o,\Diamond} & \phi \end{array}\right)(\{\gamma\} \cup \delta) = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\mathtt{rek}}{o,\Diamond} & \phi \end{array}\right)(\delta)\_\Box\_\phi(\gamma).$

Ergo `Thema4.3`: $\forall \gamma, \delta : (\gamma \in \phi^{-1}[Q]) \wedge (\gamma \notin \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]))$
$\Rightarrow (\left(\begin{array}{c|c} \overset{\mathtt{rek}}{o,\Diamond} & \phi \end{array}\right)(\{\gamma\} \cup \delta) = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\mathtt{rek}}{o,\Diamond} & \phi \end{array}\right)(\delta)\_\Box\_\phi(\gamma)).$

Konsequenz:

`Ak)` "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \phi^{-1}[Q]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]))$
$\Rightarrow (\left(\begin{array}{c|c} \overset{\mathtt{rek}}{o,\Diamond} & \phi \end{array}\right)(\{\alpha\} \cup \beta) = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\mathtt{rek}}{o,\Diamond} & \phi \end{array}\right)(\beta)\_\Box\_\phi(\alpha))$"

...

Beweis **359-4** . . .

`4.4:` Es gilt: $(E, D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \vee (E \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \vee (D \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q]))$.

`Fallunterscheidung`

`4.4.1.Fall` $E, D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

`5.1:` Aus `4.4.1.Fall` und
aus `Ai)`
folgt:

$$\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(E)\_\diamondsuit\_\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(D) = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(E)\_\square\_\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(D).$$

`5.2:` Aus `4.4.1.Fall`“$\ldots D \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q])$” ,
aus `4.4.1.Fall`“$E \ldots \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q])$” und
aus `Ai)`
folgt:

$$\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(D)\_\diamondsuit\_\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(E) = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(D)\_\square\_\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(E).$$

`6:` Aus `2.3`,
aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt:

$$\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(E)\_\square\_\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(D) = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(D)\_\square\_\left(\begin{array}{c|c} \overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} & \phi \end{array}\right)(E).$$

. . .

Beweis **359-4** ...

4.4: Es gilt: $(E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \vee (E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(D)) \vee (D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]))$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.4.2.Fall}}$ $E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

5: Aus 2.e) "$\left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \to Q$" und
aus 4.4.2.Fall "$E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$"
folgt via **94-12**: $\left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)(E) = \mathcal{U}$.

6: $$\left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)(E)_{-}\Box_{-}\left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)(D)$$
$$\stackrel{5}{=} \mathcal{U}_{-}\Box_{-}\left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)(D) \stackrel{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U}$$
$$\stackrel{\textbf{folk}}{=} \left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)(D)_{-}\Box_{-}\mathcal{U}$$
$$\stackrel{5}{=} \left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)(D)_{-}\Box_{-}\left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)(E).$$

7: Aus 6
folgt: $$\left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)(E)_{-}\Box_{-}\left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)(D)$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)(D)_{-}\Box_{-}\left(\begin{smallmatrix}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{smallmatrix}\middle|\,\phi\right)(E).$$

...

Beweis **359-4** ...

4.4: Es gilt: $(E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \vee (E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(D)) \vee (D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]))$.

`Fallunterscheidung`

...

`4.4.3.Fall` $D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

5: Aus 2.e) "$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \to Q$" und
aus 4.4.3.Fall "$D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$"
folgt via **94-12**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(D) = \mathcal{U}$.

6: $$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(E)_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(D)$$
$$\overset{5}{=} \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(D)_{-}\Box_{-}\mathcal{U} \overset{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U}$$
$$\overset{\textbf{folk}}{=} \mathcal{U}_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(E)$$
$$\overset{5}{=} \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(D)_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(E).$$

7: Aus 6
folgt: $$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(E)_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(D)$$
$$= \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(D)_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(E).$$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

A1) "$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(E)_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(D)$
$= \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(D)_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\, \phi\right)(E)$"

...

<u>Beweis</u> **359-4** ...

`4.5:` Es gilt: $(E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \vee (E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \vee (D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]))$.

`Fallunterscheidung`

`4.5.1.Fall` $E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

`5.1:` Aus `4.5.1.Fall` und aus `Ai)` folgt:

$$\left(\begin{array}{c}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{array}\middle|\,\phi\right)(E)\_\diamondsuit\_\left(\begin{array}{c}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{array}\middle|\,\phi\right)(D) = \left(\begin{array}{c}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{array}\middle|\,\phi\right)(E)\_\square\_\left(\begin{array}{c}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{array}\middle|\,\phi\right)(D).$$

`5.2:` Aus `4.5.1.Fall` "$E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$" folgt via **347-5**: $E \cup D, E \cap D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

`6:` Aus `5.2` und aus `Ai)` folgt:

$$\left(\begin{array}{c}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{array}\middle|\,\phi\right)(E \cup D)\_\diamondsuit\_\left(\begin{array}{c}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{array}\middle|\,\phi\right)(E \cap D) = \left(\begin{array}{c}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{array}\middle|\,\phi\right)(E \cup D)\_\square\_\left(\begin{array}{c}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{array}\middle|\,\phi\right)(E \cap D).$$

`7:` Aus `2.4`, aus `6` und aus `5.1` folgt:

$$\left(\begin{array}{c}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{array}\middle|\,\phi\right)(E \cup D)\_\square\_\left(\begin{array}{c}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{array}\middle|\,\phi\right)(E \cap D) = \left(\begin{array}{c}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{array}\middle|\,\phi\right)(E)\_\square\_\left(\begin{array}{c}\texttt{rek}\\ o, \diamondsuit\end{array}\middle|\,\phi\right)(D).$$

...

Beweis **359-4** ...

`4.5:` Es gilt: $(E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \vee (E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \vee (D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]))$.

`Fallunterscheidung`

...

`4.5.2.Fall` $E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

`5.1:` Aus `4.5.2.Fall` "$E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$" und aus `2.e)` "$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \to Q$"

folgt via **94-12**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(E) = \mathcal{U}$.

`5.2:` Aus `4.5.2.Fall` "$E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$"

folgt via **348-9**: $E \cup D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

`6:` Aus `5.2` "$E \cup D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$" und aus `2.e)` "$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \to Q$"

folgt via **94-12**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(E \cup D) = \mathcal{U}$.

`7:`
$$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(E \cup D)_{-}\square_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(E \cap D)$$
$$\stackrel{6}{=} \mathcal{U}_{-}\square_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(E \cap D) \stackrel{\mathbf{folk}}{=} \mathcal{U}$$
$$\stackrel{\mathbf{folk}}{=} \mathcal{U}_{-}\square_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(D)$$
$$\stackrel{5.1}{=} \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(E)_{-}\square_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(D).$$

`8:` Aus `7`

folgt:
$$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(E \cup D)_{-}\square_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(E \cap D)$$
$$= \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(E)_{-}\square_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\,\phi\right)(D).$$

...

Beweis **359-4** ...

4.5: Es gilt: $(E, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \vee (E \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \vee (D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]))$.

Fallunterscheidung

...

4.5.3.Fall $D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

5.1: Aus 4.5.3.Fall "$D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$" und aus 2.e) "$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \to Q$"

folgt via **94-12**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(D) = \mathcal{U}$.

5.2: Aus 4.5.3.Fall "$D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$"
folgt via **348-9**: $E \cup D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$.

6: Aus 5.2 "$E \cup D \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$" und aus 2.e) "$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q]) \to Q$"

folgt via **94-12**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(E \cup D) = \mathcal{U}$.

7: $$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(E \cup D)\,{}_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(E \cap D)$$
$$\overset{6}{=} \mathcal{U}\,{}_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(E \cap D) \overset{\text{folk}}{=} \mathcal{U}$$
$$\overset{\text{folk}}{=} \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(E)\,{}_{-}\Box_{-}\mathcal{U}$$
$$\overset{5.1}{=} \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(E)\,{}_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(D).$$

8: Aus 7
folgt: $$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(E \cup D)\,{}_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(E \cap D) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(E)\,{}_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(D).$$

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt:

Am) | "$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(E \cup D)\,{}_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(E \cap D) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(E)\,{}_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit}\middle|\phi\right)(D)$"

<u>Beweis</u> **359-4** ...

5.f): Aus 2.d) "$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} \middle| \phi\right)$ Funktion" und
aus A1 gleich "$\forall \gamma, \delta : (\gamma, \delta, \gamma \cup \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q])) \wedge (\gamma \cap \delta = 0)$
$\Rightarrow \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} \middle| \phi\right)(\gamma \cup \delta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} \middle| \phi\right)(\gamma)_{-}\Box_{-}\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} \middle| \phi\right)(\delta)$"
folgt via **346-1(Def)**:

$$\left(\overset{\texttt{rek}}{o, \diamondsuit} \middle| \phi\right) \text{ ist } \Box_{-}\text{Gewicht auf } \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[Q]).$$

□

Analysis: $(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)$. $\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)$.

Ersterstellung: 14/08/15 **Letzte Änderung: 14/12/15**

360-1. Die Summe endlich vieler *verschiedener* Zahlen kann mit $\mathbb{A}^{\mathtt{fin}}$ berechnet werden. Zur Berechnung der Summe endlich vieler, nicht notwendig verschiedener Zahlen steht sogleich $(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)$ zur Verfügung. Damit wird in Kürze etwa $(\Sigma^{\mathtt{rek}}1^{\mathtt{on}}\mathcal{U})\,(n) = n$ für $n \in \mathbb{N}$ erscheinen. Bei Produkten muss auf die nicht vorhandene Assoziativität Rücksicht genommen werden.

360-1(Definition)

1) $(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\middle|\,\phi\right)$.

2) $\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right) = \left(\overbrace{1,(\mathsf{M}\downharpoonleft x\times x)}^{\mathsf{rek}}\middle|\,\phi\right)$.

360-2. Nun kann für $(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)$ bereits Verfügbares geerntet werden.

360-2(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ ϕ *Funktion.*

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}])$.

b) $\mathsf{ran}\,(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi) \subseteq \mathbb{A}$.

c) $(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)$ *Relation.*

d) $(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)$ *Funktion.*

e) $(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}]) \to \mathbb{A}$.

f) $(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)$ *ist* A_*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}])$.

g) $(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(0) = 0$.

h) $\forall\alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \Rightarrow ((\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(\{\alpha\}) = \phi(\alpha))$.

i) $\forall\alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow ((\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(\{\alpha, \beta\}) = \phi(\alpha) + \phi(\beta))$.

j) $\forall\alpha, \beta : ((\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}])))$
$\Rightarrow ((\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(\{\alpha\} \cup \beta) = (\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(\beta) + \phi(\alpha))$.

k) $(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(E \cup D) + (\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(E \cap D) = (\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(E) + (\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(D)$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **360-2**</u>

`1.1:` Aus →) "ϕ Funktion",
aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus **AAI** "$\mathbb{A}$ Menge",
aus **348-2** "A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$" und
aus **348-2** "0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$"
folgt via **358-1**:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{dom}\left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}])\\
\wedge\quad &\mathsf{ran}\left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right) \subseteq \mathbb{A}\\
\wedge\quad &\left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right) \text{ Relation}\\
\wedge\quad &\left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right) \text{ Funktion}\\
\wedge\quad &\left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}]) \to \mathbb{A}\\
\wedge\quad &\left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right)(0) = 0\\
\wedge\quad &\forall\alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \Rightarrow ((\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha))\\
\wedge\quad &\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}])))\\
&\Rightarrow (\left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}\cup\beta) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right)(\beta) + \phi(\alpha)).
\end{aligned}$$

`1.2:` Aus →) "ϕ Funktion",
aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus **AAI** "$\mathbb{A}$ Menge",
aus **348-2** "A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$" und
aus **348-2** "0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$"
folgt via **358-3**: $\left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right)$ ist A_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}])$.

`1.3:` Aus →) "ϕ Funktion",
aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus **AAI** "$\mathbb{A}$ Menge",
aus **348-2** "A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$" und
aus **348-2** "0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$"
folgt via **358-5**:

$$\left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right)(E\cup D) + \left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right)(E\cap D) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right)(E) + \left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\,\middle|\,\phi\right)(D).$$

...

Beweis **360-2** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.4}}$ $(\alpha, \beta \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (\alpha \neq \beta)$.
Aus →) “ ϕ Funktion ” ,
aus **AAII** “ A Algebra in $\mathbb{A}$” ,
aus **AAI** “ $\mathbb{A}$ Menge” ,
aus **348-2** “ A tunnelt rechts auf $\mathbb{A}$” ,
aus **348-2** “ 0 ist Aneutral auf $\mathbb{A}$” und
aus `Thema1.4` “ $(\alpha, \beta \in \phi^{-1}[A]) \wedge (\alpha \neq \beta)$ ”
folgt via **358-4**: $\left(\overset{\texttt{rek}}{0, \mathsf{A}} \middle| \phi\right)(\{\alpha, \beta\}) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$.

Ergo `Thema1.4`:

A1 | “ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow \left(\left(\overset{\texttt{rek}}{0, \mathsf{A}} \middle| \phi\right)(\{\alpha, \beta\}) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)\right)$ ”

2: Aus **360-1(Def)** “ $(\Sigma^{\texttt{rek}}\phi) = \left(\overset{\texttt{rek}}{0, \mathsf{A}} \middle| \phi\right)$ ” und
aus 1.1
folgt:

$$\begin{aligned}
& \mathsf{dom}\ (\Sigma^{\texttt{rek}}\phi) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}]) \\
\wedge\quad & \mathsf{ran}\ (\Sigma^{\texttt{rek}}\phi) \subseteq \mathbb{A} \\
\wedge\quad & (\Sigma^{\texttt{rek}}\phi) \text{ Relation} \\
\wedge\quad & (\Sigma^{\texttt{rek}}\phi) \text{ Funktion} \\
\wedge\quad & (\Sigma^{\texttt{rek}}\phi) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}]) \to \mathbb{A} \\
\wedge\quad & (\Sigma^{\texttt{rek}}\phi)\,(0) = 0 \\
\wedge\quad & \forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \Rightarrow ((\Sigma^{\texttt{rek}}\phi)\,(\{\alpha\}) = \phi(\alpha)) \\
\wedge\quad & \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}]))) \\
& \Rightarrow ((\Sigma^{\texttt{rek}}\phi)\,(\{\alpha\} \cup \beta) = (\Sigma^{\texttt{rek}}\phi)\,(\beta) + \phi(\alpha)).
\end{aligned}$$

...

Beweis **360-2** . . .

3.a): Aus 3
folgt: $\mathsf{dom}\ (\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}])$.

3.b): Aus 3
folgt: $\mathsf{ran}\ (\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi) \subseteq \mathbb{A}$.

3.c): Aus 3
folgt: $(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)$ Relation.

3.d): Aus 3
folgt: $(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)$ Funktion.

3.e): Aus 3
folgt: $(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}]) \to \mathbb{A}$.

3.f): Aus **360-1(Def)** “ $(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{0, \mathsf{A}} \middle| \phi\right)$ ” und
aus 1.2
folgt: $(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)$ ist A_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}])$.

3.g): Aus 3
folgt: $(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)\,(0) = 0$.

3.h): Aus 3
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \Rightarrow ((\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)\,(\{\alpha\}) = \phi(\alpha))$.

3.i): Aus **360-1(Def)** “ $(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{0, \mathsf{A}} \middle| \phi\right)$ ” und
aus A1
folgt:
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)\,(\{\alpha, \beta\}) = \phi(\alpha) + \phi(\beta))$.

3.j): Aus 3
folgt: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}])))$
$\Rightarrow ((\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)\,(\{\alpha\} \cup \beta) = (\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)\,(\beta) + \phi(\alpha))$.

3.k): Aus **360-1(Def)** “ $(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{0, \mathsf{A}} \middle| \phi\right)$ ” und
aus 1.3
folgt: $(\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)\,(E \cup D) + (\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)\,(E \cap D) = (\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)\,(E) + (\Sigma^{\mathtt{rek}}\phi)\,(D)$.

□

360-3. Bei der Bildung endlich vieler Produkte muss auf die fehlende globale Assoziativität von M Rücksicht genommen werden.

360-3(Satz) *Es gelte:*

→) ϕ *Funktion.*

→) M *assoziativ auf* x.

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in x)$.

→) $1 \in x$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])$.

b) $\mathsf{ran}\left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right) \subseteq x$.

c) $\left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right)$ *Relation.*

d) $\left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right)$ *Funktion.*

e) $\left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x]) \to x$.

f) $\left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right)$ *ist* M_*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])$.

g) $\left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right)(0) = 1$.

h) $\forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[x]) \Rightarrow (\left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha))$.

i) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \phi^{-1}[x]) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow (\left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right)(\{\alpha, \beta\}) = \phi(\alpha) \cdot \phi(\beta))$.

j) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \phi^{-1}[x]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])))$
$\Rightarrow (\left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta) = \left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right)(\beta) \cdot \phi(\alpha))$.

k) $\left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right)(E \cup D) \cdot \left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right)(E \cap D) = \left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right)(E) \cdot \left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right)(D)$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **360-3**</u>

`1.1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)$.

`1.2:` Aus **AAII**"M Algebra in $\mathbb{A}$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in x)$"
folgt via **348-4**: $x \subseteq \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1`"$x \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **AAI**"$\mathbb{A}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: x Menge.

`2.2:` Aus **248-1**"M kommutativ auf $\mathbb{A}$" und
aus `1`"$x \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **210-2**: M kommutativ auf x.

`2.3:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)$"
folgt: $$\left(\overbrace{1, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathsf{rek}} \middle| \phi\right) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{1, \Omega} \middle| \phi\right).$$

`3.1:` Aus `2.2`"M kommutativ auf x" und
aus →) "M assoziativ auf x"
folgt via **344-15**: M tunnelt rechts auf x.

`3.2:` Aus **360-1(Def)**"$\left(\prod_x^{\mathtt{rek}} \phi\right) = \left(\overbrace{1, (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)}^{\mathsf{rek}} \middle| \phi\right)$" und
aus `2.3`
folgt: $$\left(\prod_x^{\mathtt{rek}} \phi\right) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{1, \Omega} \middle| \phi\right).$$

...

Beweis **360-3** ...

4: Aus →) “ϕ Funktion” ,
aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$” ,
aus **348-2**“1 ist Mneutral auf $\mathbb{A}$” ,
aus →) “$\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in x) \Rightarrow (\alpha\cdot\beta \in x)$” ,
aus 3.1“M tunnelt rechts auf x” ,
aus →) “$1 \in x$” ,
aus 2.1“x Menge” und
aus 1.1“$\ldots\Omega = (\mathsf{M} \downharpoonleft x \times x)$”

folgt via **359-4**:

$$\mathsf{dom}\left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])$$

$$\wedge \quad \mathsf{ran}\left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right) \subseteq x$$

$$\wedge \quad \left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right) \text{ Relation}$$

$$\wedge \quad \left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right) \text{ Funktion}$$

$$\wedge \quad \left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x]) \to x$$

$$\wedge \quad \left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right) \text{ ist } \mathsf{M\_}\text{Gewicht auf } \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])$$

$$\wedge \quad \left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right)(0) = 1$$

$$\wedge \quad \forall\alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[x]) \Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha))$$

$$\wedge \quad \forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in \phi^{-1}[x]) \wedge (\alpha \neq \beta))$$
$$\Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha,\beta\}) = \phi(\alpha)\cdot\phi(\beta))$$

$$\wedge \quad \forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \phi^{-1}[x]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])))$$
$$\Rightarrow (\left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right)(\{\alpha\}\cup\beta) = \left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right)(\beta)\cdot\phi(\alpha))$$

$$\wedge \quad \left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right)(E\cup D)\cdot\left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right)(E\cap D)$$
$$= \left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right)(E)\cdot\left(\overset{\texttt{rek}}{1,\Omega}\middle|\,\phi\right)(D).$$

...

Beweis **360-3** . . .

5: Aus 3.2 und
aus 4
folgt:

$$\mathsf{dom}\left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)=\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])$$

$$\wedge\qquad \mathsf{ran}\left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)\subseteq x$$

$$\wedge\qquad \left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)\text{ Relation}$$

$$\wedge\qquad \left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)\text{ Funktion}$$

$$\wedge\qquad \left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right):\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])\to x$$

$$\wedge\qquad \left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)\text{ ist }\mathsf{M\_}\text{Gewicht auf }\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])$$

$$\wedge\qquad \left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)(0)=1$$

$$\wedge\qquad \forall\alpha:(\alpha\in\phi^{-1}[x])\Rightarrow\left(\left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)(\{\alpha\})=\phi(\alpha)\right)$$

$$\wedge\qquad \forall\alpha,\beta:((\alpha,\beta\in\phi^{-1}[x])\wedge(\alpha\neq\beta))$$
$$\Rightarrow\left(\left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)(\{\alpha,\beta\})=\phi(\alpha)\cdot\phi(\beta)\right)$$

$$\wedge\qquad \forall\alpha,\beta:((\alpha\in\phi^{-1}[x])\wedge(\alpha\notin\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])))$$
$$\Rightarrow\left(\left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)(\{\alpha\}\cup\beta)=\left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)(\beta)\cdot\phi(\alpha)\right)$$

$$\wedge\qquad \left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)(E\cup D)\cdot\left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)(E\cap D)=\left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)(E)\cdot\left(\prod_x^{\mathsf{rek}}\phi\right)(D).$$

. . .

Beweis **360-3** . . .

6.a): Aus 5
folgt: $\mathsf{dom}\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])$.

6.b): Aus 5
folgt: $\mathsf{ran}\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right) \subseteq x$.

6.c): Aus 5
folgt: $\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)$ Relation.

6.d): Aus 5
folgt: $\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)$ Funktion.

6.e): Aus 5
folgt: $\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x]) \to x$.

6.f): Aus 5
folgt: $\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)$ ist $\mathsf{M_}$Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])$.

6.g): Aus 5
folgt: $\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)(0) = 1$.

6.h): Aus 5
folgt: $\forall\alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[x]) \Rightarrow (\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha))$.

6.i): Aus 5
folgt:
$$\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in \phi^{-1}[x]) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)(\{\alpha,\beta\}) = \phi(\alpha)\cdot\phi(\beta)).$$

6.j): Aus 5
folgt:
$$\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \phi^{-1}[x]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[x])))$$
$$\Rightarrow (\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)(\{\alpha\}\cup\beta) = \left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)(\beta)\cdot\phi(\alpha)).$$

6.k): Aus 5
folgt: $\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)(E\cup D)\cdot\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)(E\cap D) = \left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)(E)\cdot\left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\phi\right)(D)$.

□

360-4. In **360-3** kann etwa $x = \mathbb{T}$ gewählt werden.

360-4(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ ϕ *Funktion.*

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{T}])$.

b) $\mathsf{ran}\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right) \subseteq \mathbb{T}$.

c) $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)$ *Relation.*

d) $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)$ *Funktion.*

e) $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{T}]) \to \mathbb{T}$.

f) $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)$ *ist* M_*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{T}])$.

g) $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(0) = 1$.

h) $\forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{T}]) \Rightarrow \left(\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha)\right)$.

i) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \phi^{-1}[\mathbb{T}]) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow \left(\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha, \beta\}) = \phi(\alpha) \cdot \phi(\beta)\right)$.

j) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{T}]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{T}])))$
$\Rightarrow \left(\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta) = \left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\beta) \cdot \phi(\alpha)\right)$.

k) $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(E \cup D) \cdot \left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(E \cap D) = \left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(E) \cdot \left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(D)$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **360-4**

`1.a)`: Aus $\rightarrow)$ "ϕ Funktion",
aus **348-2** "M assoziativ auf $\mathbb{T}$",
aus **348-2** "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$" und
aus $\in$**schola** "$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **360-3**: $\mathsf{dom}\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{T}])$.

...

Beweis **360-4** ...

`1.b):` Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{T}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **360-3**: $\mathsf{ran}\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathsf{rek}} \phi\right) \subseteq \mathbb{T}$.

`1.c):` Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{T}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **360-3**: $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathsf{rek}} \phi\right)$ Relation.

`1.d):` Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{T}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **360-3**: $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathsf{rek}} \phi\right)$ Funktion.

`1.e):` Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{T}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **360-3**: $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathsf{rek}} \phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{T}]) \to \mathbb{T}$.

`1.f):` Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{T}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **360-3**: $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathsf{rek}} \phi\right)$ ist M_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{T}])$.

`1.g):` Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{T}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **360-3**: $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathsf{rek}} \phi\right)(0) = 1$.

`1.h):` Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{T}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **360-3**: $\forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{T}]) \Rightarrow (\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathsf{rek}} \phi\right)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha))$.

...

Beweis **360-4** . . .

`1.i)`: Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{T}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$" und
aus ∈**schola**"$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **360-3**:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \phi^{-1}[\mathbb{T}]) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow \left(\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha, \beta\}) = \phi(\alpha) \cdot \phi(\beta)\right).$$

`1.j)`: Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{T}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$" und
aus ∈**schola**"$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **360-3**:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{T}]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{T}]))) \Rightarrow \left(\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta) = \left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\beta) \cdot \phi(\alpha)\right).$$

`1.k)`: Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2**"M assoziativ auf $\mathbb{T}$",
aus **348-2**"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{T})$" und
aus ∈**schola**"$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **360-3**:

$$\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(E \cup D) \cdot \left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(E \cap D) = \left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(E) \cdot \left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(D).$$

□

360-5. Auch $x = \mathbb{C}$ ist in **360-3** möglich.

<u>**360-5(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) ϕ *Funktion.*

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{C}])$.

b) $\mathsf{ran}\,\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right) \subseteq \mathbb{C}$.

c) $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right)$ *Relation.*

d) $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right)$ *Funktion.*

e) $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{C}]) \to \mathbb{C}$.

f) $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right)$ *ist* A_*Gewicht auf* $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{C}])$.

g) $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right)(0) = 1$.

h) $\forall\alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{C}]) \Rightarrow (\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha))$.

i) $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in \phi^{-1}[\mathbb{C}]) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow (\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right)(\{\alpha,\beta\}) = \phi(\alpha)\cdot\phi(\beta))$.

j) $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{C}]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{C}])))$
$\Rightarrow (\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right)(\{\alpha\}\cup\beta) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right)(\beta)\cdot\phi(\alpha))$.

k) $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right)(E\cup D)\cdot\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right)(E\cap D) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right)(E)\cdot\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right)(D)$.

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **360-5**</u>

`1.a)`: Aus $\rightarrow$) "ϕ Funktion",
aus **348-2** "M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2** "$\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha\cdot\beta \in \mathbb{C})$" und
aus $\in$**schola** "$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **360-3**: $\mathsf{dom}\,\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}}\phi\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{C}])$.

...

Beweis **360-5** ...

1.b): Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2** "M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2** "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus ∈**schola** "$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **360-3**: $\mathsf{ran}\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right) \subseteq \mathbb{C}$.

1.c): Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2** "M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2** "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus ∈**schola** "$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **360-3**: $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)$ Relation.

1.d): Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2** "M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2** "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus ∈**schola** "$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **360-3**: $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)$ Funktion.

1.e): Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2** "M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2** "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus ∈**schola** "$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **360-3**: $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{C}]) \to \mathbb{C}$.

1.f): Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2** "M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2** "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus ∈**schola** "$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **360-3**: $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)$ ist M_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{C}])$.

1.g): Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2** "M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2** "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus ∈**schola** "$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **360-3**: $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(0) = 1$.

1.h): Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2** "M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2** "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus ∈**schola** "$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **360-3**: $\forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{C}]) \Rightarrow (\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\}) = \phi(\alpha))$.

...

Beweis **360-5** ...

1.i): Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2** "M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2** "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus $\in$**schola** "$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **360-3**:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \phi^{-1}[\mathbb{C}]) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha, \beta\}) = \phi(\alpha) \cdot \phi(\beta)).$$

1.j): Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2** "M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2** "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus $\in$**schola** "$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **360-3**:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{C}]) \wedge (\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{C}])))$$
$$\Rightarrow (\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\beta) \cdot \phi(\alpha)).$$

1.k): Aus →) "ϕ Funktion",
aus **348-2** "M assoziativ auf $\mathbb{C}$",
aus **348-2** "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$" und
aus $\in$**schola** "$1 \in \mathbb{C}$"
folgt via **360-3**:

$$\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(E \cup D) \cdot \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(E \cap D) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(E) \cdot \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(D).$$

$\square$

360-6. Ist ϕ eine Funktion, so stimmen $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)$ und $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)$ auf $\phi^{-1}[\mathbb{R}]$ überein. Die Beweis-Reihenfolge ist `abdc)`.

<u>**360-6(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) ϕ *Funktion.*

Dann folgt:

a) $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(0) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(0)$.

b) $\forall \alpha : (\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{R}]) \Rightarrow (\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\}) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\}))$.

c) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \phi^{-1}[\mathbb{R}]) \Rightarrow (\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha, \beta\}) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha, \beta\}))$.

d) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{R}])) \Rightarrow (\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\alpha) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\alpha))$.

<u>Beweis **360-6**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "ϕ Funktion"
folgt via **360-4**: $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(0) = 1$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "ϕ Funktion"
folgt via **360-5**: $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(0) = 1$.

`2.a):` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(0) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(0)$.

...

Beweis **360-6** ...

$\boxed{\texttt{Thema2.2}}$		$\alpha \in \mathbb{R}$.
`3.1:`	Aus `Thema2.2`“$\alpha \in \mathbb{R}$” folgt via $\wedge$**SZ**:	$\alpha \in \mathbb{T}$.
`3.2:`	Aus `Thema2.2`“$\alpha \in \mathbb{R}$” folgt via $\wedge$**SZ**:	$\alpha \in \mathbb{C}$.
`4.1:`	Aus $\rightarrow$)“ϕ Funktion” und aus `3.1`“$\alpha \in \mathbb{T}$” folgt via **360-4**:	$\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\}) = \alpha$.
`4.2:`	Aus $\rightarrow$)“ϕ Funktion” und aus `3.2`“$\alpha \in \mathbb{C}$” folgt via **360-5**:	$\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\}) = \alpha$.
`5:`	Aus `4.1` und aus `4.2` folgt:	$\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\}) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\})$.

Ergo `Thema2.2`: $\boxed{\texttt{Ab)} \;\Big|\; \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow \left(\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\}) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\})\right)\text{”}}$

...

<u>Beweis **360-6**</u> ...

3.1: Aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **folk**: $\phi^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq \phi^{-1}[\mathbb{T}]$.

3.2: Aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$"
folgt via **folk**: $\phi^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq \phi^{-1}[\mathbb{C}]$.

4.1: Aus 3.1"$\phi^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq \phi^{-1}[\mathbb{T}]$"
folgt via **32-7**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{R}]) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{T}])$.

4.2: Aus 3.2"$\phi^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq \phi^{-1}[\mathbb{C}]$"
folgt via **32-7**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{R}]) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{C}])$.

4.3: Aus $\rightarrow$)"ϕ Funktion"
folgt via **360-4**: $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)$ ist M_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{T}])$.

4.4: Aus $\rightarrow$)"ϕ Funktion"
folgt via **360-5**: $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)$ ist M_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{C}])$.

5.d): Aus 4.3"$\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)$ ist M_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{T}])$",
aus 4.4"$\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)$ ist M_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{C}])$",
aus 4.1"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{R}]) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{T}])$",
aus 4.2"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{R}]) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{C}])$",
aus 2.a)"$\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(0) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(0)$" und
aus Ab) gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow \left(\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\}) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha\})\right)$"
folgt via **348-15**:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{R}])) \Rightarrow \left(\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\alpha) = \left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\alpha)\right).$$

Thema5 $\gamma, \delta \in \phi^{-1}[\mathbb{R}]$.

6: Aus Thema5"$\gamma, \delta \in \phi^{-1}[\mathbb{R}]$"
folgt via **223-1**: $\{\gamma, \delta\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{R}])$.

7: Aus 6 und
aus 5.d)
folgt: $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\gamma, \delta\}) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\gamma, \delta\})$.

Ergo Thema5:

$$\forall \gamma, \delta : (\gamma, \delta \in \phi^{-1}[\mathbb{R}]) \Rightarrow \left(\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\gamma, \delta\}) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\gamma, \delta\})\right).$$

Konsequenz:

Ac) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \phi^{-1}[\mathbb{R}])$
$\Rightarrow \left(\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha, \beta\}) = \left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathtt{rek}} \phi\right)(\{\alpha, \beta\})\right)$"

$\square$

Mengenlehre: universelle $\in$Relation in.
$p\_M.x$ auf E. $x.M\_q$ auf E. $x.M.y$ auf E.

Ersterstellung: 19/11/15 **Letzte Änderung: 27/11/15**

361-1. Die **universelle** $\in$**Relation** besteht aus allen geordneten Paaren (p, q) von *Mengen* p, q, für die $p \in q$ gilt.

361-1(Definition)

1) in

$$= \mathsf{361.0()} = \{(\lambda, \mu) : \lambda \in \mu\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **universelle** $\in$**Relation**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{in}.$$

361-2. Offenbar ist in die universelle $\in$Relation. Auch dass in Relation und Unmenge ist, erscheint wenig verblüffend.

361-2(Satz)

a) in *universelle* $\in$*Relation.*

b) *Aus* "$\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *universelle* $\in$*Relation" folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) *Aus* "$w \in \mathsf{in}$"
folgt "$\exists \Omega, \Psi : (\Omega, \Psi \text{ Menge}) \wedge (\Omega \in \Psi) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$".

d) *Aus* "p_in_q" *folgt* "p, q *Menge" und* "$p \in q$".

e) *Aus* "$p \in q$ *Menge" folgt* "p_in_q".

f) in *Relation.*

g) "$p\_\mathsf{in}\_\{p\}$" *genau dann, wenn* "p *Menge*".

h) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{in}) = \mathcal{U}$.

i) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{in}) = \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

j) in *Unmenge.*

Beweis **361-2** a)
Aus "$\mathsf{in} = \mathsf{in}$"
folgt via **361-1(Def)**: in universelle $\in$Relation.

b) VS gleich $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ universelle $\in$Relation.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}\ldots$ universelle $\in$Relation"
folgt via **361-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{in}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ universelle $\in$Relation"
folgt via **361-1(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{in}$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

Beweis **361-2** `c)` `VS` gleich $w \in \mathsf{in}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{in}$"
folgt **p.def.**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \Psi) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`2:` Aus `1`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$" und
aus `VS`
folgt: $(\Omega, \Psi) \in \mathsf{in}$.

`3:` Aus `2`"$(\Omega, \Psi) \in \mathsf{in}$"
folgt via **folk**: Ω, Ψ Menge.

`4:` Aus `1`"$\exists \Omega, \Psi \ldots$",
aus `3` und
aus `1`"$\ldots (\Omega \in \Psi) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega, \Psi \text{ Menge}) \wedge (\Omega \in \Psi) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`d)` `VS` gleich p_in_q.

`1:` Aus `VS` gleich "p_in_q"
folgt: $(p, q) \in \mathsf{in}$.

`2:` Aus `1`"$(p, q) \in \mathsf{in}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega, \Psi \text{ Menge}) \wedge (\Omega \in \Psi) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `2`"$\ldots (p, q) = (\Omega, \Psi)$" und
aus `2`"$\ldots \Omega, \Psi$ Menge$\ldots$"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Psi) \wedge (p, q \text{ Menge})$.

`4.1:` Aus `3`
folgt: $\boxed{p, q \text{ Menge}}$

`4.2:` Aus `3`"$p = \Omega \ldots$",
aus `3`"$\ldots q = \Psi \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \Omega \in \Psi \ldots$"
folgt: $\boxed{p \in q}$

<u>Beweis</u> **361-2** `e)` `VS` gleich $p \in q$ Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in q \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in q \ldots$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega = p) \wedge (\Psi = q)$.

`2.1:` Aus `1.1`"p Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots q$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (\Omega = p) \wedge (\Psi = q)$" und
aus `VS` gleich "$p \in q \ldots$"
folgt: $\Omega \in \Psi$.

`2.3:` Aus `1.2`"$\ldots (\Omega = p) \wedge (\Psi = q)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (p, q)$.

`3:` Aus `2.3`
folgt: $(p, q) = (\Omega, \Psi)$.

`4:` Aus `1.2`"$\exists \Omega, \Psi \ldots$",
aus `2.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \Psi) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \Psi) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$" und
aus `2.1`"(p, q) Menge"
folgt **p.def.**: $(p, q) \in \mathsf{in}$.

`6:` Aus `5`
folgt: p_in_q.

`f)`

`Thema0`	$\alpha \in \mathsf{in}$.
Aus `Thema0`"$\alpha \in \mathsf{in}$"	
folgt **p.def.**:	$\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{in}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: in Relation.

Beweis **361-2** g) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich p Menge.

1: Aus VS gleich “p Menge”
folgt via **folk**: $p \in \{p\}$.

2: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

3: Aus 1“$p \in \{p\}$” und
aus 2“$\{p\}$ Menge”
folgt via des bereits bewiesenen e): $p\_\mathsf{in}\_\{p\}$.

g) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $p\_\mathsf{in}\_\{p\}$.
Aus VS gleich “$p\_\mathsf{in}\_\{p\}$”
folgt via **folk**: p Menge.

h)

$\boxed{\text{Thema0}}$ $\alpha \in \mathcal{U}$.

1: Aus Thema0“$\alpha \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

2: Aus 1“α Menge”
folgt via des bereits bewiesenen g): $\alpha\_\mathsf{in}\_\{\alpha\}$.

3: Aus 2“$\alpha\_\mathsf{in}\_\{\alpha\}$”
folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{in})$.

Ergo Thema0: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{in}))$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{in}) = \mathcal{U}$.

<u>Beweis</u> **361-2** `i)`

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{in})$.

`1:` Aus `Thema0.1`"$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{in})$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \mathsf{in}$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\Omega \_\mathsf{in}\_ \alpha$.

`3:` Aus `2`"$\Omega \_\mathsf{in}\_ \alpha$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$(\Omega, \alpha \text{ Menge}) \wedge (\Omega \in \alpha)$.

`4.1:` Aus `3`"$\ldots \alpha$ Menge$\ldots$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in \alpha$"
folgt via **folk**: $0 \neq \alpha$.

`5:` Aus `4.1`"$\alpha \in \mathcal{U}$" und
aus `4.2`"$0 \neq \alpha$"
folgt via **5-15**: $\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{in})) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\mathsf{ran}\,(\mathsf{in}) \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}\text{”}}$

...

<u>Beweis</u> **361-2** `i)` ...

`Thema0.2`	$\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
`1.1:` Aus `Thema0.2` "$\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$" folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`1.2:` Aus `Thema0.2` "$\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$" folgt via **5-15**:	$0 \neq \alpha \in \mathcal{U}$.
`2:` Aus `1` "$0 \neq \alpha \ldots$" folgt via **folk**:	$\exists \Omega : \Omega \in \alpha$.
`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \alpha$" und aus `1.1` "α Menge" folgt via des bereits bewiesenen `e)`:	$\Omega\_\mathsf{in}\_\alpha$.
`4:` Aus `3` "$\Omega\_\mathsf{in}\_\alpha$" folgt via **30-2**:	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{in})$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{in}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathcal{U} \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{in})$"

`1:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{in}) \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}$" und
aus `A2` gleich "$\mathcal{U} \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{in})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{in}) = \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`j)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{in}) = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1` "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{in}) = \mathcal{U}$"
folgt via **7-9**: in Unmenge.

□

361-3. Eine schwelende Idee wird hier Wirklichkeit.

361-3(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` p_M_q.

`ii)` $q \in M[\{p\}]$.

`iii)` $p \in M^{-1}[\{q\}]$.

Beweis **361-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich p_M_q.

`1:` Aus `VS` folgt: $(p, q) \in M$.

`2:` Aus `1` "$(p, q) \in M$" folgt via **9-15**: $q \in M[\{p\}]$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $q \in M[\{p\}]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in M[\{p\}]$" folgt via **9-15**: $(p, q) \in M$.

`2:` Aus `1` "$(p, q) \in M$" folgt via **12-7**: $p \in M^{-1}[\{q\}]$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $p \in M^{-1}[\{q\}]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in M^{-1}[\{q\}]$" folgt via **12-7**: $(p, q) \in M$.

`2:` Aus `1` folgt: p_M_q.

□

361-4. Als Vorbereitung der Untersuchung von "$\neg(p\_\mathsf{in}\_q)$" wird ein Kriterium für p_in_q zur Verfügung gestellt werden.

361-4(Satz) *Die Aussagen* i), ii), iii), iv) *sind äquivalent:*

i) p_in_q.

ii) $q \in [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$.

iii) $p \in \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$.

iv) $p \in q$ *Menge.*

Beweis **361-4** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich p_in_q.

Aus VS gleich "p_in_q"

folgt via **41-25**: $q \in [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ VS gleich $q \in [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$.

1: Aus VS gleich "$q \in [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: p_in_q.

2: Aus 1"p_in_q"

folgt via **41-25**: $p \in \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ VS gleich $p \in \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$.

1: Aus VS gleich "$p \in \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$"
folgt via **41-25**: p_in_q.

2: Aus 1"p_in_q"
folgt via **361-2**: $(p, q \text{ Menge}) \wedge (p \in q)$.

3: Aus 2
folgt: $p \in q$ Menge.

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $p \in q$ Menge.

Aus VS gleich "$p \in q$ Menge"
folgt via **361-2**: p_in_q.

□

361-5. Für die unmittelbar folgende Untersuchung ist "$q \notin [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$" von besonderer Bedeutung.

<u>**361-5(Satz)**</u> *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\neg(p\_\mathsf{in}\_q)$.

`ii)` $q \notin [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$.

`iii)` $p \notin \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$.

`iv)` *"$p \notin q$" oder "q Unmenge".*

<u>Beweis **361-5**</u>

`1:` Via **361-4** gilt:

$$(p\_\mathsf{in}\_q) \Leftrightarrow (q \in [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle) \Leftrightarrow (p \in \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]) \Leftrightarrow (p \in q \text{ Menge}).$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$(\neg(p\_\mathsf{in}\_q)) \Leftrightarrow (\neg(q \in [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle)) \Leftrightarrow (\neg(p \in \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q])) \Leftrightarrow (\neg(p \in q \text{ Menge})).$$

`3:` Aus `2`
folgt:

$$(\neg(p\_\mathsf{in}\_q)) \Leftrightarrow (q \notin [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle) \Leftrightarrow (p \notin \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]) \Leftrightarrow ((\neg(p \in q)) \vee (\neg(q \text{ Menge}))).$$

`4:` Aus `3`
folgt:

$$(\neg(p\_\mathsf{in}\_q)) \Leftrightarrow (q \notin [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle) \Leftrightarrow (p \notin \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]) \Leftrightarrow ((p \notin q) \vee (q \text{ Unmenge})).$$

□

361-6. Nun geht es um Aussagen ähnlich zu $p \in .x$ und E

361-6(Satz)

a) *"$p \in .x$ auf E" genau dann, wenn*

$$\text{“}E \subseteq \mathsf{dom}\, x\text{”} \textit{ und } \text{“}x[E] \subseteq [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle\text{”}.$$

b) *"$\neg(p \in .x$ auf $E)$" genau dann, wenn*

$$\text{“}E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x\text{”} \textit{ oder } \text{“}x[E] \not\subseteq [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle\text{”}.$$

c) *"$p \notin .x$ auf E" genau dann, wenn*

$$\text{“}E \subseteq \mathsf{dom}\, x\text{”} \textit{ und } \text{“}x[E] \cap [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle = 0\text{”}.$$

d) *"$\neg(p \notin .x$ auf $E)$" genau dann, wenn*

$$\text{“}E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x\text{”} \textit{ oder } \text{“}0 \neq x[E] \cap [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle\text{”}.$$

<u>Beweis **361-6**</u> `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in .x$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in .x$ auf E"

folgt via **228-1(Def)**: $\boxed{E \subseteq \mathsf{dom}\, x}$

`Thema1.2` $\beta \in x[E]$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in x[E]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \beta) \in x)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$p \in .x$ auf E" und
aus `2`"$\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \beta) \in x)$"
folgt via **228-1(Def)**: $p \in \beta$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\beta \in x[E]$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`5:` Aus `3`"$p \in \beta$" und
aus `4`"β Menge"
folgt via **361-2**: p_in_β.

`6:` Aus `5`"p_in_β"
folgt via **41-25**: $\beta \in [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \beta : (\beta \in x[E]) \Rightarrow (\beta \in [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{x[E] \subseteq [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle}$

Beweis **361-6** a) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle)$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

1: Aus Thema0 "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **folk**: $\beta \in x[E]$.

2: Aus 1 "$\beta \in x[E]$" und
aus VS gleich "$\ldots x[E] \subseteq [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **folk**: $\beta \in [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$.

3: Aus 2 "$\beta \in [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: p_in_β.

4: Aus 3 "p_in_β"
folgt via **361-2**: $p \in \beta$.

Ergo Thema0: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \in \beta)\text{”}}$

1: Aus VS gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \in \beta)$"
folgt via **228-1(Def)**: $p \in .x$ auf E.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt:

$$(p \in .x \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle)).$$

2: Aus 1
folgt: $$(\neg(p \in .x \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(x[E] \subseteq [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle))).$$

3: Aus 2
folgt: $$(\neg(p \in .x \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (x[E] \not\subseteq [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle)).$$

<u>Beweis **361-6**</u> `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \notin .x$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \notin .x$ auf E"

folgt via **228-1(Def)**: $\boxed{E \subseteq \mathsf{dom}\, x}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\beta \in x[E] \cap [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in x[E] \cap [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **folk**: $(\beta \in x[E]) \wedge (\beta \in [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle)$.

`3.1:` Aus 2"$\beta \in x[E] \ldots$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \beta) \in x)$.

`3.2:` Aus 2"$\ldots \beta \in [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **361-4**: $p \in \beta$ Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "$p \notin .x$ auf E" und
aus `3.1`"$\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \beta) \in x)$"
folgt via **228-1(Def)**: $p \notin \beta$.

`5:` Aus `3.2`
folgt: $p \in \beta$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \beta : (\beta \in x[E] \cap [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\beta \notin x[E] \cap [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **folk**: $\boxed{x[E] \cap [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle = 0}$

<u>Beweis **361-6**</u> `c)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle = 0)$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

1: Aus `Thema0` "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **folk**: $\beta \in x[E]$.

2: Aus 1 "$\beta \in x[E]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x[E] \cap [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle = 0$"
folgt via **161-1**: $\beta \notin [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$.

3: Aus 2 "$\beta \notin [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **361-5**: $(p \notin \beta) \vee (\beta \text{ Unmenge})$.

4: Aus 1 "$\beta \in x[E]$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

5: Aus 3 und
aus 4
folgt: $p \notin \beta$.

Ergo `Thema0`: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \notin \beta)\text{”}}$

1: Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \notin \beta)$"
folgt via **228-1(Def)**: $p \notin .x$ auf E.

`d)`

1: Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:

$$(p \notin .x \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle = 0)).$$

2: Aus 1
folgt: $(\neg(p \notin .x \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(x[E] \cap [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle = 0)))$.

3: Aus 2
folgt: $(\neg(p \notin .x \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (0 \neq x[E] \cap [p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle))$.

□

361-7. Hier werden Aussagen ähnlich zu $x. \in q$ neu gestaltet.

361-7(Satz)

a) *"$x. \in q$ auf E" genau dann, wenn "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und "$x[E] \subseteq q$".*

b) *"$\neg(x. \in q$ auf $E)$" genau dann, wenn "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" oder "$x[E] \not\subseteq q$".*

c) *"$x. \notin q$ auf E" genau dann, wenn "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und "$x[E] \cap q = 0$".*

d) *"$\neg(x. \notin q$ auf $E)$" genau dann, wenn "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" oder "$0 \neq x[E] \cap q$".*

Beweis **361-7** a) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x. \in q$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x. \in q$ auf E" folgt via **228-1(Def)**: $\boxed{E \subseteq \mathsf{dom}\, x}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\beta \in x[E]$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\beta \in x[E]$" folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \beta) \in x)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x. \in q$ auf E" und aus 2 "$\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \beta) \in x)$" folgt via **228-1(Def)**: $\beta \in q$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \beta : (\beta \in x[E]) \Rightarrow (\beta \in q)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{x[E] \subseteq q}$

Beweis **361-7** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq q)$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

1: Aus Thema0 "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **folk**: $\beta \in x[E]$.

2: Aus 1 "$\beta \in x[E]$" und
aus VS gleich "$\ldots x[E] \subseteq q$"
folgt via **folk**: $\beta \in q$.

Ergo Thema0: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in q)\text{"}}$

1: Aus VS gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in q)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \in q$ auf E.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt:
$(x. \in q \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq q))$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x. \in q \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(x[E] \subseteq q)))$.

3: Aus 2
folgt: $(\neg(x. \in q \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (x[E] \not\subseteq q))$.

Beweis **361-7** `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x. \notin q$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x. \notin q$ auf E"

folgt via **228-1(Def)**: $\boxed{E \subseteq \mathsf{dom}\, x}$

`Thema1.2` $\beta \in x[E] \cap q$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in x[E] \cap q$"
folgt via **folk**: $(\beta \in x[E]) \wedge (\beta \in q)$.

`3:` Aus `2`"$\beta \in x[E] \ldots$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \beta) \in x)$.

`4:` Aus `VS` gleich "$x. \notin q$ auf E" und
aus `3`"$\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \beta) \in x)$"
folgt via **228-1(Def)**: $\beta \notin q$.

`5:` Aus `2`
folgt: $\beta \in q$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \beta : (\beta \in x[E] \cap q) \Rightarrow (\beta \notin x[E] \cap q)$.

Konsequenz via **folk**: $\boxed{x[E] \cap q = 0}$

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap q = 0)$.

`Thema0` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`1:` Aus `Thema0`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **folk**: $\beta \in x[E]$.

`2:` Aus `1`"$\beta \in x[E]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x[E] \cap q = 0$"
folgt via **161-1**: $\beta \notin q$.

Ergo `Thema0`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin q)$"

`1:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin q)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \notin q$ auf E.

Beweis **361-7** `d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:

$$(x. \notin q \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap q = 0)).$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$(\neg(x. \notin q \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(x[E] \cap q = 0))).$$

`3:` Aus `2` folgt:

$$(\neg(x. \notin q \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (0 \neq x[E] \cap q)).$$

$\square$

361-8. Der vermeintliche Symmetriebruch beim Übergang von “$p. \in x$ auf E” zu “$x. \in q$ auf E”, der auf dem nicht gleichzeitigen Vorhandensein von in_Intervallen beruht, ist für *Mengen* q in der Tat nicht vorhanden. Dies wird unter Einsatz von Vorliegendem bewiesen.

361-8(Satz)

a) $\langle \cdot \overset{\text{in}}{|} 0] = 0$.

b) “$0 \neq \langle \cdot \overset{\text{in}}{|} q]$” *genau dann, wenn* “$0 \neq q$ *Menge*”.

c) “$\langle \cdot \overset{\text{in}}{|} q] = 0$” *genau dann, wenn* “$q = 0$” *oder* “$q$ *Unmenge*”.

d) $\langle \cdot \overset{\text{in}}{|} q] \subseteq q$.

e) “q *Menge*” *genau dann, wenn* “$q = \langle \cdot \overset{\text{in}}{|} q]$”.

Beweis **361-8** a)

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\qquad \alpha \in \langle \cdot \overset{\text{in}}{|} 0]$.

1: Aus Thema0 “$\alpha \in \langle \cdot \overset{\text{in}}{|} 0]$”
folgt via **361-4**: $\qquad \alpha \in 0$.

2: Via **folk** gilt: $\qquad \alpha \notin 0$.

Ergo Thema0: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in \langle \cdot \overset{\text{in}}{|} 0]) \Rightarrow (\alpha \notin \langle \cdot \overset{\text{in}}{|} 0])$.

Konsequenz via **folk**: $\qquad \langle \cdot \overset{\text{in}}{|} 0] = 0$.

<u>Beweis **361-8**</u> `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 \neq \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$”
folgt via **folk**: $\exists\Omega : \Omega \in \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$.

`2:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$”
folgt via **361-4**: $\Omega \in q$ Menge.

`3:` Aus `2`“$\Omega \in q \ldots$”
folgt via **folk**: $0 \neq q$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $0 \neq q$ Menge.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 \neq q$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq q \ldots$”
folgt via **folk**: $\exists\Omega : \Omega \in q$.

`2:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in q$” und
aus `VS` gleich “$\ldots q$ Menge”
folgt via **361-4**: $\Omega \in \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$.

`3:` Aus `2`“$\Omega \in \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$”
folgt via **folk**: $0 \neq \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(0 \neq \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]) \Leftrightarrow (0 \neq q \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(0 \neq \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q])) \Leftrightarrow (\neg(0 \neq q \text{ Menge}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q] = 0) \Leftrightarrow ((\neg(0 \neq q)) \vee (\neg(q \text{ Menge})))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q] = 0) \Leftrightarrow ((q = 0) \vee (q \text{ Unmenge}))$.

Beweis **361-8** `d)`

> `Thema0` $\alpha\in\langle\cdot\overset{\mathsf{in}}{|}q]$.
>
> `1:` Aus `Thema0`"$\alpha\in\langle\cdot\overset{\mathsf{in}}{|}q]$"
> folgt via **361-4**: $\alpha\in q$ Menge.
>
> `2:` Aus `1`
> folgt: $\alpha\in q$.

Ergo `Thema0`: $\forall\alpha:(\alpha\in\langle\cdot\overset{\mathsf{in}}{|}q])\Rightarrow(\alpha\in q)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\langle\cdot\overset{\mathsf{in}}{|}q]\subseteq q$.

`e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich q Menge.

> `Thema0.1` $\alpha\in q$.
>
> `1:` Aus `Thema0.1`"$\alpha\in q$" und
> aus `VS` gleich "q Menge"
> folgt via **361-4**: $\alpha\in\langle\cdot\overset{\mathsf{in}}{|}q]$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall\alpha:(\alpha\in q)\Rightarrow(\alpha\in\langle\cdot\overset{\mathsf{in}}{|}q])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$q\subseteq\langle\cdot\overset{\mathsf{in}}{|}q]$"

`0.2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\langle\cdot\overset{\mathsf{in}}{|}q]\subseteq q$.

`1:` Aus `A1` gleich "$q\subseteq\langle\cdot\overset{\mathsf{in}}{|}q]$" und
aus `0.2`"$\langle\cdot\overset{\mathsf{in}}{|}q]\subseteq q$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $q=\langle\cdot\overset{\mathsf{in}}{|}q]$.

Beweis **361-8** e) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $q = \langle \cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$.

1: Es gilt: $(q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall q Unmenge.

2: Aus 1.1.Fall "q Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen c): $\langle \cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q] = 0$.

3: Aus 2 und
aus VS
folgt: $q = 0$.

4: Aus 3 "$q = 0$"
folgt via **94-1**: q Menge.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: q Menge.

□

361-9. Hier wird die angekündigte Symmetrie von **361-6,7** für *Mengen* q hergestellt.

361-9(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) q *Menge.*

Dann folgt:

a) "$x. \in q$ *auf* E" *genau dann, wenn*

"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" *und* "$x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$".

b) "$\neg(x. \in q$ *auf* $E)$" *genau dann, wenn*

"$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" *oder* "$x[E] \not\subseteq \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$".

c) "$x. \notin q$ *auf* E" *genau dann, wenn*

"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" *und* "$x[E] \cap \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q] = 0$".

d) "$\neg(x. \notin q$ *auf* $E)$" *genau dann, wenn*

"$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" *oder* "$0 \neq x[E] \cap \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$".

Beweis **361-9**

1.1: Aus →) “q Menge”

folgt via **361-8**: $q = \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$.

1.2: Via **361-7** gilt: $(x. \in q \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq q))$.

1.3: Via **361-7** gilt: $(\neg(x. \in q \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (x[E] \not\subseteq q))$.

1.4: Via **361-7** gilt: $(x. \notin q \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap q = 0))$.

1.5: Via **361-7** gilt: $(\neg(x. \notin q \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (0 \neq x[E] \cap q))$.

2.a): Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $(x. \in q \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]))$.

2.b): Aus 1.1 und
aus 1.3
folgt: $(\neg(x. \in q \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (x[E] \not\subseteq \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]))$.

2.c): Aus 1.1 und
aus 1.4
folgt: $(x. \notin q \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q] = 0))$.

2.d): Aus 1.1 und
aus 1.5
folgt: $(\neg(x. \notin q \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (0 \neq x[E] \cap \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]))$.

□

361-10. Hier soll ein Zwischenblick auf $\mathsf{paar}(x,y)[E]$ geworfen werden.

361-10(Satz)

a) *"$(p,(r,s)) \in \mathsf{paar}(x,y)$" genau dann, wenn*
"$(p,r) \in x$" und "$(p,s) \in y$".

b) *Aus "$w \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$" folgt*
"$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (w = (\Phi, \Gamma))$".

c) *Aus "$(r,s) \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$"*
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, r) \in x) \wedge ((\Omega, s) \in y)$".

d) *Aus "$p \in E$" und "$(p,r) \in x$" und "$(p,s) \in y$"*
folgt "$(r,s) \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$".

Beweis **361-10** a) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $(p,(r,s)) \in \mathsf{paar}(x,y)$.

1: Aus VS gleich "$(p,(r,s)) \in \mathsf{paar}(x,y)$"
folgt via **242-2**: $\exists \Phi, \Gamma : ((p,\Phi) \in x) \wedge ((p,\Gamma) \in y) \wedge ((r,s) = (\Phi,\Gamma))$.

2.1: Aus 1"$\ldots (p,\Phi) \in x \ldots$"
folgt via **folk**: p, Φ Menge.

2.2: Aus 1"$\ldots (p,\Gamma) \in y \ldots$"
folgt via **folk**: p, Γ Menge.

3: Aus 1"$\ldots (r,s) = (\Phi,\Gamma)$",
aus 2.1"$\ldots \Phi$ Menge" und
aus 2.2"$\ldots \Gamma$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(r = \Phi) \wedge (s = \Gamma)$.

4.1: Aus 3"$r = \Phi \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p,r) = (p,\Phi)$.

4.2: Aus 3"$\ldots s = \Gamma$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p,s) = (p\,\Gamma)$.

5.1: Aus 4.1 und
aus 1"$\ldots (p,\Phi) \in x \ldots$"
folgt: $\boxed{(p,r) \in x}$

5.2: Aus 4.2 und
aus 1"$\ldots (p,\Gamma) \in y \ldots$"
folgt: $\boxed{(p,s) \in y}$

a) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $((p,r) \in x) \wedge ((q,s) \in y)$.
Aus VS gleich "$((p,r) \in x) \wedge ((q,s) \in y)$"
folgt via **242-2**: $(p,(r,s)) \in \mathsf{paar}(x,y)$.

<u>Beweis **361-10**</u> `b)` `VS` gleich $w \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, w) \in \mathsf{paar}(x,y))$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, w) \in \mathsf{paar}(x,y)$"
folgt via **242-2**: $\exists \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (w = (\Phi, \Gamma))$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\exists \Phi, \Gamma \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `2`"$\ldots ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (w = (\Phi, \Gamma))$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Gamma : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (w = (\Phi, \Gamma))$.

`c)` `VS` gleich $(r,s) \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(r,s) \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, (r,s)) \in \mathsf{paar}(x,y))$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, (r,s)) \in \mathsf{paar}(x,y)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $((\Omega, r) \in x) \wedge ((\Omega, s) \in y)$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \ldots$" und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, r) \in x) \wedge ((\Omega, s) \in y)$.

`d)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge ((p,r) \in x) \wedge ((p,s) \in y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((p,r) \in x) \wedge ((p,s) \in y)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(p, (r,s)) \in \mathsf{paar}(x,y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$" und
aus `1`"$(p, (r,s)) \in \mathsf{paar}(x,y)$"
folgt via **folk**: $(r,s) \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$.

$\square$

361-11. Auch "$x. \in .y$ auf E" ist verallgemeinerungsfähig re-formulierbar.

361-11(Satz)

a) "$x. \in .y$ *auf* E" *genau dann, wenn*
"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" *und* "$\mathsf{paar}(x, y)[E] \subseteq \mathsf{in}$".

b) "$\neg(x. \in .y$ *auf* $E)$" *genau dann, wenn*
"$E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" *oder* "$\mathsf{paar}(x, y)[E] \not\subseteq \mathsf{in}$".

c) "$x. \notin .y$ *auf* E" *genau dann, wenn*
"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" *und* "$\mathsf{paar}(x, y)[E] \cap \mathsf{in} = 0$".

d) "$\neg(x. \notin .y$ *auf* $E)$" *genau dann, wenn*
"$E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" *oder* "$0 \neq \mathsf{paar}(x, y)[E] \cap \mathsf{in}$".

Beweis **361-11** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x. \in .y$ auf E.

1.1: Aus VS gleich "$x. \in .y$ auf E"

folgt via **228-1(Def)**: $\boxed{E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)}$

Thema1.2 $\alpha \in \mathsf{paar}(x, y)[E]$.

2: Aus Thema1.2"$\alpha \in \mathsf{paar}(x, y)[E]$"
folgt via **361-10**:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Psi) \in y)$
$\wedge(\alpha = (\Phi, \Psi))$.

3: Aus VS gleich "$x. \in .y$ auf E" und
aus 2"$\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Psi) \in y) \ldots$"
folgt via **228-1(Def)**: $\Phi \in \Psi$.

4: Aus 3"$\ldots (\Omega, \Psi) \in y \ldots$"
folgt via **folk**: Ω, Ψ Menge.

5: Aus 3"$\Phi \in \Psi$" und
aus 4"$\ldots \Psi$ Menge"
folgt via **361-2**: $\Phi \_\mathsf{in}\_ \Psi$.

6: Aus 5
folgt: $(\Phi, \Psi) \in \mathsf{in}$.

7: Aus 2"$\alpha = (\Phi, \Psi)$" und
aus 6
folgt: $\alpha \in \mathsf{in}$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{paar}(x, y)[E]) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{in})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\mathsf{paar}(x, y)[E] \subseteq \mathsf{in}}$

<u>Beweis **361-11**</u> `a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq \mathsf{in})$.

`Thema0` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x) \wedge ((\alpha,\gamma) \in y)$.

`1:` Aus `Thema0` "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x) \wedge ((\alpha,\gamma) \in y)$"
folgt via **361-10**: $(\beta,\gamma) \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$.

`2:` Aus `1` "$(\beta,\gamma) \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq \mathsf{in}$"
folgt via **folk**: $(\beta,\gamma) \in \mathsf{in}$.

`3:` Aus `2`
folgt: β_in_γ.

`4:` Aus `3` "β_in_γ"
folgt via **361-2**: $\beta \in \gamma$.

Ergo `Thema0`:

`A1`	"$\forall \alpha,\beta,\gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x) \wedge ((\alpha,\gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \in \gamma)$"

`1:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha,\beta,\gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x) \wedge ((\alpha,\gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \in \gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \in .y$ auf E.

`b)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$(x. \in .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq \mathsf{in}))$.

`2:` Aus `1`
folgt:
$(\neg(x. \in .y \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))) \vee (\neg(\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq \mathsf{in})))$.

`3:` Aus `2`
folgt:
$(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \vee (\mathsf{paar}(x,y)[E] \not\subseteq \mathsf{in}))$.

<u>Beweis **361-11**</u> `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x. \notin .y$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x. \notin .y$ auf E"

folgt via **228-1(Def)**: $\boxed{E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)}$

`Thema1.2` $\alpha \in \mathsf{paar}(x, y)[E] \cap \mathsf{in}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \mathsf{paar}(x, y)[E] \cap \mathsf{in}$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in \mathsf{paar}(x, y)[E]) \wedge (\alpha \in \mathsf{in})$.

`3:` Aus 2"$\alpha \in \mathsf{paar}(x, y)[E]$"
folgt via **361-10**:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Psi) \in y) \wedge (\alpha = (\Phi, \Psi))$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$x. \notin .y$ auf E" und
aus 3"$\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Psi) \in y) \ldots$"
folgt via **228-1(Def)**: $\Phi \notin \Psi$.

`4.2:` Aus 2"$\ldots \alpha \in \mathsf{in}$" und
aus 3"$\ldots \alpha = (\Phi, \Psi)$"
folgt: $(\Phi, \Psi) \in \mathsf{in}$.

`5:` Aus `4.2`"$(\Phi, \Psi) \in \mathsf{in}$"
folgt via **361-2**: $\Phi \in \Psi$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{paar}(x, y)[E] \cap \mathsf{in}) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{paar}(x, y)[E] \cap \mathsf{in})$.

Konsequenz via **folk**: $\boxed{\mathsf{paar}(x, y) \cap \mathsf{in} = 0}$

Beweis **361-11** c) $\boxed{\Leftarrow}$

VS gleich $(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\mathsf{paar}(x, y)[E] \cap \mathsf{in} = 0)$.

Thema0 $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

1: Aus Thema0 "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$"
folgt via **361-10**: $(\beta, \gamma) \in \mathsf{paar}(x, y)[E]$.

2: Aus 1 "$(\beta, \gamma) \in \mathsf{paar}(x, y)[E]$" und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{paar}(x, y)[E] \cap \mathsf{in} = 0$"
folgt via **161-1**: $(\beta, \gamma) \notin \mathsf{in}$.

3: Aus 2
folgt: $\neg(\beta\_\mathsf{in}\_\gamma)$.

4: Aus 3 "$\neg(\beta\_\mathsf{in}\_\gamma)$"
folgt via **361-5**: $(\beta \notin \gamma) \vee (\gamma$ Unmenge$)$.

5: Aus 1 "$\ldots (\beta, \gamma) \in \mathsf{paar}(x, y)[E]$"
folgt via **folk**: β, γ Menge.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $\beta \notin \gamma$.

Ergo Thema0:

A1 | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \notin \gamma)$"

1: Aus VS gleich "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) \ldots$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \notin \gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \notin .y$ auf E.

<u>Beweis **361-11**</u> `d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$$(x. \notin .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\mathsf{paar}(x,y)[E] \cap \mathsf{in} = 0)).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$(\neg(x. \notin .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))) \vee (\neg(\mathsf{paar}(x,y)[E] \cap \mathsf{in} = 0))).$$

`3:` Aus `2`
folgt:
$$(\neg(x. \notin .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \vee (0 \neq \mathsf{paar}(x,y)[E] \cap \mathsf{in})).$$

□

361-12. Die vorangehenden Untersuchungen legen es nahe, die hier untersuchten Aussagen "$p \in .x$ auf E", "$x. \in q$ auf E", "$x. \in .y$ auf E" zu verallgemeinern. Ärgerlicher Weise treten hier die bereits in anderem Kontext festgelegten Terme "$p\_M.x$", "$x.M\_q$", "$x.M.y$" aufs. Jedoch sind sie *hier stets* mit dem Zusatz "auf E" versehen. Damit können sie von den Termen dort - die jeweils *Klassen* und *keine Aussagen* waren - unterschieden werden.

361-12(Definition)

1) "$p\_M.x$ auf E" genau dann, wenn

$$\text{“}E \subseteq \mathsf{dom}\, x\text{” und “}x[E] \subseteq [\![p \overset{M}{|} \cdot\rangle\text{”}.$$

2) "$\neg(p\_M.x)$ auf E" genau dann, wenn

$$\text{“}E \subseteq \mathsf{dom}\, x\text{” und “}x[E] \cap [\![p \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0\text{”}.$$

3) "$x.M\_q$ auf E" genau dann, wenn

$$\text{“}E \subseteq \mathsf{dom}\, x\text{” und “}x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} q]\!]\text{”}.$$

4) "$\neg(x.M\_q)$ auf E" genau dann, wenn

$$\text{“}E \subseteq \mathsf{dom}\, x\text{” und “}x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q]\!] = 0\text{”}.$$

5) "$x.M.y$ auf E" genau dann, wenn

$$\text{“}E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)\text{” und “}\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq M\text{”}.$$

6) "$\neg(x.M.y)$ auf E" genau dann, wenn

$$\text{“}E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)\text{” und “}M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E] = 0\text{”}.$$

361-13. Ein nett zu lesender Zwischenschritt belebt den Essay.

361-13(Satz)

a) *Aus* "$E \subseteq \mathsf{dom}\,x$" *und* "$x[E] = 0$" *folgt* "$E = 0$".

b) *Aus* "$E \subseteq \mathsf{dom}\,x$" *und* "$x[E] \subseteq 0$" *folgt* "$E = 0$".

c) *Aus* "a *Unmenge*" *folgt* "$[a \overset{M}{|} b] = 0$" *und* "$]a \overset{M}{|} b[= 0$" *und* "$]a \overset{M}{|} b] = 0$" *und* "$[a \overset{M}{|} b[= 0$" *und* "$[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$" *und* "$]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$".

d) *Aus* "b *Unmenge*" *folgt* "$[a \overset{M}{|} b] = 0$" *und* "$]a \overset{M}{|} b[= 0$" *und* "$]a \overset{M}{|} b] = 0$" *und* "$[a \overset{M}{|} b[= 0$" *und* "$\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0$" *und* "$\langle\cdot \overset{M}{|} b[= 0$".

e) *Aus* "$x \cap y = 0$" *und* "$E \subseteq x$" *und* "$D \subseteq y$" *folgt* "$E \cap D = 0$".

f) *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \notin y)$" *folgt* "$x \cap y = 0$".

g) *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \notin y)$" *folgt* "$y \cap x = 0$".

Beweis **361-13** `a)` `VS` gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\,x) \wedge (x[E] = 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\,x \ldots$"
folgt via **folk**: $E \cap \mathsf{dom}\,x = E$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x[E] = 0$"
folgt via **8-13**: $E \cap \mathsf{dom}\,x = 0$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $E = 0$.

`b)` `VS` gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\,x) \wedge (x[E] \subseteq 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x[E] \subseteq 0$"
folgt via **folk**: $x[E] = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\,x \ldots$" und
aus `1` "$x[E] = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $E = 0$.

Beweis **361-13** `c)` `VS` gleich a Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "a Unmenge"
folgt via **0-1**: $a \notin \mathsf{dom}\, M$.

`2.1:` Aus `1`"$a \notin \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-39**: $\boxed{[a \overset{M}{|} b] = 0}$

`2.2:` Aus `1`"$a \notin \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-39**: $\boxed{]a \overset{M}{|} b[= 0}$

`2.3:` Aus `1`"$a \notin \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-39**: $\boxed{]a \overset{M}{|} b] = 0}$

`2.4:` Aus `1`"$a \notin \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-39**: $\boxed{[a \overset{M}{|} b[= 0}$

`2.5:` Aus `1`"$a \notin \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-39**: $\boxed{[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0}$

`2.6:` Aus `1`"$a \notin \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **41-39**: $\boxed{]a \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0}$

<u>Beweis **361-13**</u> `d)` `VS` gleich b Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "b Unmenge"
folgt via **0-1**: $b \notin \mathsf{ran}\, M$.

`2.1:` Aus `1`"$b \notin \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **41-40**: $\boxed{[a \overset{M}{|} b] = 0}$

`2.2:` Aus `1`"$b \notin \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **41-40**: $\boxed{]a \overset{M}{|} b[= 0}$

`2.3:` Aus `1`"$b \notin \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **41-40**: $\boxed{]a \overset{M}{|} b] = 0}$

`2.4:` Aus `1`"$b \notin \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **41-40**: $\boxed{[a \overset{M}{|} b[= 0}$

`2.5:` Aus `1`"$b \notin \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **41-40**: $\boxed{\langle\cdot \overset{M}{|} b] = 0}$

`2.6:` Aus `1`"$b \notin \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **41-40**: $\boxed{\langle\cdot \overset{M}{|} b[= 0}$

<u>Beweis **361-13**</u> `e)` `VS` gleich $(x \cap y = 0) \wedge (E \subseteq x) \wedge (D \subseteq y)$..

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (E \subseteq x) \wedge (D \subseteq y)$"
folgt via **2-13**: $E \cap D \subseteq x \cap y$.

`2:` Aus `1`"$E \cap D \subseteq x \cap y$" und
aus `VS` gleich "$x \cap y = 0$"
folgt: $E \cap D \subseteq 0$.

`3:` Aus `2`"$E \cap D \subseteq 0$"
folgt via **folk**: $E \cap D = 0$.

`f)` `VS` gleich $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \notin y)$.

`1:` Es gilt: $(x \cap y = 0) \vee (0 \neq x \cap y)$.
`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq x \cap y$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq x \cap y$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in x \cap y$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in x \cap y$"
folgt via **folk**: $(\Omega \in x) \wedge (\Omega \in y)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \notin y)$"
folgt: $\Omega \notin y$.

`5:` Aus `3`
folgt: $\Omega \in y$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cap y = 0$.

`g)` `VS` gleich $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \notin y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \notin y)$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $x \cap y = 0$.

`2:` Via **KG**$\cap$ gilt: $y \cap x = x \cap y$.

`3:` Aus `2` und
aus `1`
folgt: $y \cap x = 0$.

$\square$

361-14. Beweistechnisch ist es gelegentlich vortheilhaft, "$p\_M.x$ auf E" und "$x.M\_q$ auf E" auf "$x.M.y$ auf E" mit geeigneten x, y zurückführen zu können.

361-14(Satz)

a) "$E \subseteq (\mathsf{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathsf{dom}\,x)$" *und* "$\mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}E, x)[E] \subseteq M$"

genau dann, wenn "$E \subseteq \mathsf{dom}\,x$" *und* "$x[E] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

b) "$E \subseteq (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E))$" *und* "$\mathsf{paar}(x, q^{\mathbf{on}}E)[E] \subseteq M$"

genau dann, wenn "$E \subseteq \mathsf{dom}\,x$" *und* "$x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} q]$".

c) "$p\_M.x$ *auf* E" *genau dann, wenn* "$(p^{\mathbf{on}}E).M.x$ *auf* E".

d) "$x.M\_q$ *auf* E" *genau dann, wenn* "$x.M.(q^{\mathbf{on}}E)$ *auf* E".

<u>Beweis **361-14**</u> a) $\boxed{\Rightarrow}$

VS gleich $(E \subseteq (\mathsf{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathsf{dom}\,x)) \wedge (\mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}E, x)[E] \subseteq M)$.

1.1: Aus VS gleich "$E \subseteq (\mathsf{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathsf{dom}\,x) \ldots$"

folgt via **2-9**: $\boxed{E \subseteq \mathsf{dom}\,x}$

1.2: Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

Fallunterscheidung

1.2.1.Fall p Menge.

Thema2 $\alpha \in x[E]$.

3: Aus Thema2"$\alpha \in x[E]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

4: Aus 1.2.1.Fall"p Menge" und
aus 3"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **214-2**: $(\Omega, p) \in p^{\mathbf{on}}E$.

5: Aus 3"$\ldots \Omega \in E \ldots$",
aus 4"$(\Omega, p) \in p^{\mathbf{on}}E$" und
aus 3"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$"
folgt via **361-10**: $(p, \alpha) \in \mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}E, x)[E]$.

6: Aus 5"$(p, \alpha) \in \mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}E, x)[E]$" und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}E, x)[E] \subseteq M$"
folgt via **folk**: $(p, \alpha) \in M$.

7: Aus 6
folgt: p_M_α.

8: Aus 7"p_M_α"
folgt via **41-25**: $\alpha \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ergo Thema2: $\forall \alpha : (\alpha \in x[E]) \Rightarrow (\alpha \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x[E] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

...

Beweis **361-14** a) $\boxed{\Rightarrow}$

VS gleich $(E \subseteq (\mathsf{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathsf{dom}\,x)) \wedge (\mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}E, x)[E] \subseteq M)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.2.Fall` p Unmenge.

2: Aus `1.2.2.Fall` "p Unmenge"
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E) = 0$.

3: $(\mathsf{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathsf{dom}\,x) \stackrel{2}{=} 0 \cap (\mathsf{dom}\,x) \stackrel{\mathbf{folk}}{=} 0$.

4: Aus VS gleich "$E \subseteq (\mathsf{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathsf{dom}\,x) \ldots$" und
aus 3 "$(\mathsf{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathsf{dom}\,x) = 0$"
folgt: $E \subseteq 0$.

5: Aus 4 "$E \subseteq 0$"
folgt via **folk**: $E = 0$.

6.1: Via **folk** gilt: $0 \subseteq [p \stackrel{M}{|} \cdot\rangle$.

6.2: $x[E] \stackrel{5}{=} x[0] \stackrel{\mathbf{folk}}{=} 0$.

7: Aus 6.2 "$x[E] = \ldots = 0$" und
aus 6.1
folgt: $x[E] \subseteq [p \stackrel{M}{|} \cdot\rangle$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{x[E] \subseteq [p \stackrel{M}{|} \cdot\rangle}$

Beweis **361-14** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}E, x)[E]$.

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in \mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}E, x)[E]$"
folgt via **361-10**:
$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in p^{\mathbf{on}}E) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in x)$
$\wedge (\alpha = (\Phi, \Gamma))$.

3.1: Aus 2 "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus 2 "$\ldots (\Omega, \Gamma) \in x \ldots$"
folgt via **folk**: $\Gamma \in x[E]$.

3.2: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \Phi) \in p^{\mathbf{on}}E \ldots$"
folgt via **214-2**: $(\Omega \in E) \wedge (\Phi = p)$.

4: Aus 3.1 "$\Gamma \in x[E]$" und
aus VS gleich "$\ldots x[E] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **folk**: $\Gamma \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

5: Aus 4 "$\Gamma \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: p_M_Γ.

6: Aus 3.2 "$\ldots \Phi = p$" und
aus 5
folgt: Φ_M_Γ.

7: Aus 6
folgt: $(\Phi, \Gamma) \in M$.

8: Aus 2 "$\ldots \alpha = (\Phi, \Gamma)$" und
aus 7
folgt: $\alpha \in M$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}E, x)[E]) \Rightarrow (\alpha \in M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}E, x)[E] \subseteq M}$

...

Beweis **361-14** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(E \subseteq \mathrm{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

1.2: Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

Fallunterscheidung

1.2.1.Fall p Menge.

2: Aus 1.2.1.Fall"p Menge"
folgt via **214-3**: $\mathrm{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E) = E$.

3: Aus VS gleich "$E \subseteq \mathrm{dom}\, x$"
folgt via **folk**: $E = E \cap \mathrm{dom}\, x$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $E = (\mathrm{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathrm{dom}\, x)$.

5: Aus 4"$E = (\mathrm{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathrm{dom}\, x)$"
folgt via **folk**: $E \subseteq (\mathrm{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathrm{dom}\, x)$.

1.2.2.Fall p Unmenge.

2: Aus 1.2.2.Fall"p Unmenge"
folgt via **361-13**: $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$.

3: Aus VS gleich "$\ldots x[E] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$" und
aus 2
folgt: $x[E] \subseteq 0$.

4: Aus VS gleich "$E \subseteq \mathrm{dom}\, x \ldots$" und
aus 3"$x[E] \subseteq 0$"
folgt via **361-13**: $E = 0$.

5: Via **folk** gilt: $0 \subseteq (\mathrm{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathrm{dom}\, x)$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $E \subseteq (\mathrm{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathrm{dom}\, x)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$\boxed{E \subseteq (\mathrm{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathrm{dom}\, x)}$$

Beweis **361-14** b) $\boxed{\Rightarrow}$

VS gleich $(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E))) \wedge (\mathsf{paar}(x, q^{\mathbf{on}}E, x)[E] \subseteq M)$.

1.1: Aus VS gleich "$E \subseteq ((\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E)) \ldots$"

folgt via **2-9**: $\boxed{E \subseteq \mathsf{dom}\, x}$

1.2: Es gilt: $(q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

Fallunterscheidung

1.2.1.Fall q Menge.

Thema2 $\alpha \in x[E]$.

3: Aus Thema2 "$\alpha \in x[E]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

4: Aus 1.2.1.Fall "q Menge" und
aus 3 "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **214-2**: $(\Omega, q) \in q^{\mathbf{on}}E$.

5: Aus 3 "$\ldots \Omega \in E \ldots$",
aus 3 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und
aus 4 "$(\Omega, q) \in q^{\mathbf{on}}E$"
folgt via **361-10**: $(\alpha, q) \in \mathsf{paar}(x, q^{\mathbf{on}}E)[E]$.

6: Aus 5 "$(\alpha, q) \in \mathsf{paar}(x, q^{\mathbf{on}}E)[E]$" und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{paar}(x, q^{\mathbf{on}}E)[E] \subseteq M$"
folgt via **folk**: $(\alpha, q) \in M$.

7: Aus 6
folgt: α_M_q.

8: Aus 7 "α_M_q"
folgt via **41-25**: $\alpha \in \langle \cdot \overset{M}{|} q]$.

Ergo Thema2: $\forall \alpha : (\alpha \in x[E]) \Rightarrow (\alpha \in \langle \cdot \overset{M}{|} q])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} q]$.

...

Beweis **361-14** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$

`VS` gleich $$(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, (q^{\mathbf{on}}E))) \wedge (\mathsf{paar}(q^{\mathbf{on}}E, x)[E] \subseteq M).$$

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.2.Fall` q Unmenge.

`2:` Aus `1.2.2.Fall` "q Unmenge"
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\, (q^{\mathbf{on}}E) = 0.$

`3:` $(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, (q^{\mathbf{on}}E)) \stackrel{2}{=} (\mathsf{dom}\, x) \cap 0 \stackrel{\mathbf{folk}}{=} 0.$

`4:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, (q^{\mathbf{on}}E)) \ldots$" und
aus `3` "$(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, (q^{\mathbf{on}}E)) = 0$"
folgt: $E \subseteq 0.$

`5:` Aus `4` "$E \subseteq 0$"
folgt via **folk**: $E = 0.$

`6.1:` Via **folk** gilt: $0 \subseteq \langle \cdot \stackrel{M}{|} q].$

`6.2:` $x[E] \stackrel{5}{=} x[0] \stackrel{\mathbf{folk}}{=} 0.$

`7:` Aus `6.2` "$x[E] = \ldots = 0$" und
aus `6.1`
folgt: $x[E] \subseteq \langle \cdot \stackrel{M}{|} q].$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{x[E] \subseteq \langle \cdot \stackrel{M}{|} q]}$

<u>Beweis **361-14**</u> b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} q])$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{paar}(x, q^{\mathbf{on}}E)[E]$.

2: Aus Thema1.1"$\alpha \in \mathsf{paar}(x, q^{\mathbf{on}}E)[E]$"
folgt via **361-10**:
$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in q^{\mathbf{on}}E)$
$\wedge(\alpha = (\Phi, \Gamma))$.

3.1: Aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus 2"$\ldots (\Omega, \Phi) \in x \ldots$"
folgt via **folk**: $\Phi \in x[E]$.

3.2: Aus 2"$\ldots (\Omega, \Gamma) \in q^{\mathbf{on}}E \ldots$"
folgt via **214-2**: $(\Omega \in E) \wedge (\Gamma = q)$.

4: Aus 3.1"$\Phi \in x[E]$" und
aus VS gleich "$\ldots x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} q]$"
folgt via **folk**: $\Phi \in \langle \cdot \overset{M}{|} q]$.

5: Aus 4"$\Phi \in \langle \cdot \overset{M}{|} q]$"
folgt via **41-25**: Φ_M_q.

6: Aus 3.2"$\ldots \Gamma = q$" und
aus 5
folgt: Φ_M_Γ.

7: Aus 6
folgt: $(\Phi, \Gamma) \in M$.

8: Aus 2"$\ldots \alpha = (\Phi, \Gamma)$" und
aus 7
folgt: $\alpha \in M$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{paar}(x, q^{\mathbf{on}}E)[E]) \Rightarrow (\alpha \in M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\mathsf{paar}(x, q^{\mathbf{on}}E)[E] \subseteq M}$

...

Beweis **361-14** b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} q])$.

1.2: Es gilt: $(q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

Fallunterscheidung

1.2.1.Fall q Menge.

2: Aus 1.2.1.Fall "q Menge"
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E) = E$.

3: Aus VS gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **folk**: $E = (\mathsf{dom}\, x) \cap E$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $E = (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E))$.

5: Aus 4 "$E = (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E))$"
folgt via **folk**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E))$.

1.2.2.Fall q Unmenge.

2: Aus 1.2.2.Fall "q Unmenge"
folgt via **361-13**: $\langle \cdot \overset{M}{|} q] = 0$.

3: Aus VS gleich "$\ldots x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} q]$" und
aus 2
folgt: $x[E] \subseteq 0$.

4: Aus VS gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus 3 "$x[E] \subseteq 0$"
folgt via **361-13**: $E = 0$.

5: Via **folk** gilt: $0 \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E))$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E))$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$\boxed{E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E))}$$

<u>Beweis **361-14**</u> `c)`

`1.1:` Via **361-12(Def)** gilt:

$$(p\_M.x \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq [\![p \overset{M}{|} \cdot\rangle)).$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:

$$((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq [\![p \overset{M}{|} \cdot\rangle)) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathsf{dom}\, x)) \wedge (\mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}E, x)[E] \subseteq M)).$$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:
$$(p\_M.x \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathsf{dom}\, x)) \wedge (\mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}E, x)[E] \subseteq M)).$$

`3:` Via **361-12(Def)** gilt:

$$((E \subseteq (\mathsf{dom}\,(p^{\mathbf{on}}E)) \cap (\mathsf{dom}\, x)) \wedge (\mathsf{paar}(p^{\mathbf{on}}M, x)[E] \subseteq M)) \Leftrightarrow ((p^{\mathbf{on}}E).M.x \text{ auf } E).$$

`4:` Aus `2`
aus `3`
folgt:
$$(p\_M.x \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((p^{\mathbf{on}}E).M.x \text{ auf } E).$$

`d)`

`1.1:` Via **361-12(Def)** gilt:

$$(x.M\_q \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} q]\!])).$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:

$$((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} q]\!])) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E))) \wedge (\mathsf{paar}(x, q^{\mathbf{on}}E)[E] \subseteq M)).$$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:
$$(x.M\_q \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E))) \wedge (\mathsf{paar}(x, q^{\mathbf{on}}E)[E] \subseteq M)).$$

`3:` Via **361-12(Def)** gilt:

$$((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,(q^{\mathbf{on}}E))) \wedge (\mathsf{paar}(x, q^{\mathbf{on}}E)[E] \subseteq M)) \Leftrightarrow (x.M.(q^{\mathbf{on}}E) \text{ auf } E).$$

`4:` Aus `2`
aus `3`
folgt:
$$(x.M\_q \text{ auf } E) \Leftrightarrow (x.M.(q^{\mathbf{on}}E) \text{ auf } E).$$

□

361-15. Die Mengenalgebra ist nach wie vor für einige Zwischenresultate gut.

361-15(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $M \cap N = 0$.

Dann folgt:

a) $\overset{\textbf{ir}}{M} \cap \overset{\textbf{ir}}{N} = 0$.

b) $M^{-1} \cap N^{-1} = 0$.

c) $\overset{\textbf{ir}}{M}^{-1} \cap \overset{\textbf{ir}}{N}^{-1} = 0$.

d) $M[\{p\}] \cap N[\{p\}] = 0$.

e) $\overset{\textbf{ir}}{M}[\{p\}] \cap \overset{\textbf{ir}}{N}[\{p\}] = 0$.

f) $M^{-1}[\{p\}] \cap N^{-1}[\{p\}] = 0$.

g) $\overset{\textbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}] \cap \overset{\textbf{ir}}{N}^{-1}[\{p\}] = 0$.

<u>Beweis **361-15**</u>

`1.1:` Via **41-6** gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq M.$

`1.2:` Via **41-6** gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{N} \subseteq N.$

`2.a):` Aus →) "$M \cap N = 0$",
aus `1.1` "$\overset{\mathbf{ir}}{M} \subseteq M$" und
aus `1.2` "$\overset{\mathbf{ir}}{N} \subseteq N$"
folgt via **361-13**: $\overset{\mathbf{ir}}{M} \cap \overset{\mathbf{ir}}{N} = 0.$

`2.b):` $M^{-1} \cap N^{-1} \overset{\mathbf{12-1}}{=} (M \cap N)^{-1} \overset{\rightarrow)}{=} 0^{-1} \overset{\mathbf{11-10}}{=} 0.$

`3.c):` $\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1} \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1} \overset{\mathbf{12-1}}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M} \cap \overset{\mathbf{ir}}{N})^{-1} \overset{\text{2.a)}}{=} 0^{-1} \overset{\mathbf{11-10}}{=} 0.$

`3.d):` $M[\{p\}] \cap N[\{p\}] \overset{\mathbf{9-1}}{=} (M \cap N)[\{p\}] \overset{\rightarrow)}{=} 0[\{p\}] \overset{\mathbf{8-12}}{=} 0.$

`3.e):` $\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}[\{p\}] \overset{\mathbf{9-1}}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M} \cap \overset{\mathbf{ir}}{N})[\{p\}] \overset{\text{2.a)}}{=} 0[\{p\}] \overset{\mathbf{8-12}}{=} 0.$

`3.f):` $M^{-1}[\{p\}] \cap N^{-1}[\{p\}] \overset{\mathbf{9-1}}{=} (M^{-1} \cap N^{-1})[\{p\}] \overset{\text{2.b)}}{=} 0[\{p\}] \overset{\mathbf{8-12}}{=} 0.$

`3.g):` $\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1}[\{p\}] \overset{\mathbf{9-1}}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1} \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1})[\{p\}] \overset{\mathbf{12-1}}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M} \cap \overset{\mathbf{ir}}{N})^{-1}[\{p\}]$
$\overset{\text{2.a)}}{=} 0^{-1}[\{p\}] \overset{\mathbf{11-17}}{=} 0.$

□

361-16. Die Erkenntnisse von **361-15** wirken sich auf Intervalle aus.

361-16(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $M \cap N = 0$.

Dann folgt:

a) $[a \overset{M}{\mid} b] \cap [a \overset{N}{\mid} d] = 0.$

b) $[a \overset{M}{\mid} b] \cap [c \overset{N}{\mid} b] = 0.$

c) $]a \overset{M}{\mid} b[\cap]a \overset{N}{\mid} d[= 0.$

d) $]a \overset{M}{\mid} b[\cap]c \overset{N}{\mid} b[= 0.$

e) $]a \overset{M}{\mid} b] \cap]a \overset{N}{\mid} d] = 0.$

f) $]a \overset{M}{\mid} b] \cap]c \overset{N}{\mid} b] = 0.$

g) $[a \overset{M}{\mid} b[\cap [a \overset{N}{\mid} d[= 0.$

h) $[a \overset{M}{\mid} b[\cap [c \overset{N}{\mid} b[= 0.$

i) $[a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap [a \overset{N}{\mid} \cdot\rangle = 0.$

j) $]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \cap]a \overset{N}{\mid} \cdot\rangle = 0.$

k) $\langle\cdot \overset{M}{\mid} b] \cap \langle\cdot \overset{N}{\mid} b] = 0.$

l) $\langle\cdot \overset{M}{\mid} b[\cap \langle\cdot \overset{N}{\mid} b[= 0.$

<u>Beweis **361-16**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ “ $M \cap N = 0$ ”
folgt via **361-15**: $M[\{a\}] \cap N[\{a\}] = 0.$

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ “ $M \cap N = 0$ ”
folgt via **361-15**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}[\{a\}] = 0.$

`1.3:` Aus $\rightarrow\!)$ “ $M \cap N = 0$ ”
folgt via **361-15**: $M^{-1}[\{b\}] \cap N^{-1}[\{b\}] = 0.$

`1.4:` Aus $\rightarrow\!)$ “ $M \cap N = 0$ ”
folgt via **361-15**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1}[\{b\}] = 0.$

`2.a):` $$[a \overset{M}{\mid} b] \cap [a \overset{N}{\mid} d] \overset{\mathbf{349-4}}{=} (M[\{a\}] \cap M^{-1}[\{b\}]) \cap (N[\{a\}] \cap N^{-1}[\{d\}])$$
$$\overset{\mathbf{213-6}}{=} (M[\{a\}] \cap N[\{a\}]) \cap (M^{-1}[\{b\}] \cap N^{-1}[\{d\}])$$
$$\overset{1.1}{=} 0 \cap (M^{-1}[\{b\}] \cap N^{-1}[\{d\}]) \overset{\mathbf{folk}}{=} 0.$$

`2.b):` $$[a \overset{M}{\mid} b] \cap [c \overset{N}{\mid} b] \overset{\mathbf{349-4}}{=} (M[\{a\}] \cap M^{-1}[\{b\}]) \cap (N[\{c\}] \cap N^{-1}[\{b\}])$$
$$\overset{\mathbf{213-6}}{=} (M[\{a\}] \cap N[\{c\}]) \cap (M^{-1}[\{b\}] \cap N^{-1}[\{b\}])$$
$$\overset{1.3}{=} (M[\{a\}] \cap N[\{c\}]) \cap 0 \overset{\mathbf{folk}}{=} 0.$$

`2.c):` $$]a \overset{M}{\mid} b[\cap]a \overset{N}{\mid} d[\overset{\mathbf{349-4}}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}]) \cap (\overset{\mathbf{ir}}{N}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1}[\{d\}])$$
$$\overset{\mathbf{213-6}}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}[\{a\}]) \cap (\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1}[\{d\}])$$
$$\overset{1.2}{=} 0 \cap (\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1}[\{d\}]) \overset{\mathbf{folk}}{=} 0.$$

`2.d):` $$]a \overset{M}{\mid} b[\cap]c \overset{N}{\mid} b[\overset{\mathbf{349-4}}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}]) \cap (\overset{\mathbf{ir}}{N}[\{c\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1}[\{b\}])$$
$$\overset{\mathbf{213-6}}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}[\{c\}]) \cap (\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1}[\{b\}])$$
$$\overset{1.4}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}[\{c\}]) \cap 0 \overset{\mathbf{folk}}{=} 0.$$

`2.e):` $$]a \overset{M}{\mid} b] \cap]a \overset{N}{\mid} d] \overset{\mathbf{349-4}}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap M^{-1}[\{b\}]) \cap (\overset{\mathbf{ir}}{N}[\{a\}] \cap N^{-1}[\{d\}])$$
$$\overset{\mathbf{213-6}}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}[\{a\}]) \cap (M^{-1}[\{b\}] \cap N^{-1}[\{d\}])$$
$$\overset{1.2}{=} 0 \cap (M^{-1}[\{b\}] \cap N^{-1}[\{d\}]) \overset{\mathbf{folk}}{=} 0.$$

`2.f):` $$]a \overset{M}{\mid} b] \cap]c \overset{N}{\mid} b] \overset{\mathbf{349-4}}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap M^{-1}[\{b\}]) \cap (\overset{\mathbf{ir}}{N}[\{c\}] \cap N^{-1}[\{b\}])$$
$$\overset{\mathbf{213-6}}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}[\{c\}]) \cap (M^{-1}[\{b\}] \cap N^{-1}[\{b\}])$$
$$\overset{1.3}{=} (\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}[\{c\}]) \cap 0 \overset{\mathbf{folk}}{=} 0.$$

...

Beweis **361-16** . . .

2.g): $\lbrack a \overset{M}{|} b\lbrack \cap \lbrack a \overset{N}{|} d\lbrack \overset{\mathbf{349-4}}{=} (M[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}]) \cap (N[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{d\}])$

$\overset{\mathbf{213-6}}{=} (M[\{a\}] \cap N[\{a\}]) \cap (\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{d\}])$

$\overset{1.1}{=} 0 \cap (\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1}[\{d\}]) \overset{\mathbf{folk}}{=} 0.$

2.h): $\lbrack a \overset{M}{|} b\lbrack \cap \lbrack c \overset{N}{|} b\lbrack \overset{\mathbf{349-4}}{=} (M[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}]) \cap (N[\{c\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1}[\{b\}])$

$\overset{\mathbf{213-6}}{=} (M[\{a\}] \cap N[\{c\}]) \cap (\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1}[\{b\}])$

$\overset{1.4}{=} (M[\{a\}] \cap N[\{c\}]) \cap 0 \overset{\mathbf{folk}}{=} 0.$

2.i): $\lbrack a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \lbrack a \overset{N}{|} \cdot\rangle \overset{\mathbf{349-4}}{=} M[\{a\}] \cap N[\{a\}] \overset{1.1}{=} 0.$

2.j): $\rbrack a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \rbrack a \overset{N}{|} \cdot\rangle \overset{\mathbf{349-4}}{=} \overset{\mathbf{ir}}{M}[\{a\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}[\{a\}] \overset{1.2}{=} 0.$

2.k): $\langle\cdot \overset{M}{|} b\rbrack \cap \langle\cdot \overset{N}{|} b\rbrack \overset{\mathbf{349-4}}{=} M^{-1}[\{b\}] \cap N^{-1}[\{b\}] \overset{1.3}{=} 0.$

2.l): $\langle\cdot \overset{M}{|} b\lbrack \cap \langle\cdot \overset{N}{|} b\lbrack \overset{\mathbf{349-4}}{=} \overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{b\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{N}^{-1}[\{b\}] \overset{1.4}{=} 0.$

$\square$

361-17. Wegen $M \cap M^C = 0$ ergibt sich aus **361-15** fast ohne Aufwand eine Folgerung.

361-17(Satz)

a) $\overset{\mathbf{ir}}{M} \cap \overset{\mathbf{ir}}{M^C} = 0.$

b) $M^{-1} \cap M^{C-1} = 0.$

c) $\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1} \cap \overset{\mathbf{ir}}{M^C}^{-1} = 0.$

d) $M[\{p\}] \cap M^C[\{p\}] = 0.$

e) $\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M^C}[\{p\}] = 0.$

f) $M^{-1}[\{p\}] \cap M^{C-1}[\{p\}] = 0.$

g) $\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M^C}^{-1}[\{p\}] = 0.$

<u>Beweis **361-17**</u>

`1:` Via **folk** gilt: $M \cap M^C = 0.$

`2.a):` Aus `1` “ $M \cap M^C = 0$ ”
folgt via **361-15**: $\overset{\mathbf{ir}}{M} \cap \overset{\mathbf{ir}}{M^C} = 0.$

`2.b):` Aus `1` “ $M \cap M^C = 0$ ”
folgt via **361-15**: $M^{-1} \cap M^{C-1} = 0.$

`2.c):` Aus `1` “ $M \cap M^C = 0$ ”
folgt via **361-15**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1} \cap \overset{\mathbf{ir}}{M^C}^{-1} = 0.$

`2.d):` Aus `1` “ $M \cap M^C = 0$ ”
folgt via **361-15**: $M[\{p\}] \cap M^C[\{p\}] = 0.$

`2.e):` Aus `1` “ $M \cap M^C = 0$ ”
folgt via **361-15**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}[\{p\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M^C}[\{p\}] = 0.$

`2.f):` Aus `1` “ $M \cap M^C = 0$ ”
folgt via **361-15**: $M^{-1}[\{p\}] \cap M^{C-1}[\{p\}] = 0.$

`2.g):` Aus `1` “ $M \cap M^C = 0$ ”
folgt via **361-15**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}^{-1}[\{p\}] \cap \overset{\mathbf{ir}}{M^C}^{-1}[\{p\}] = 0$

$\square$

361-18. Auch **361-16** geht nicht spurlos an M^C vorüber.

361-18(Satz)

a) $[a \overset{M}{|} b] \cap [a \overset{M^C}{|} d] = 0.$

b) $[a \overset{M}{|} b] \cap [c \overset{M^C}{|} b] = 0.$

c) $]a \overset{M}{|} b[\cap]a \overset{M^C}{|} d[= 0.$

d) $]a \overset{M}{|} b[\cap]c \overset{M^C}{|} b[= 0.$

e) $]a \overset{M}{|} b] \cap]a \overset{M^C}{|} d] = 0.$

f) $]a \overset{M}{|} b] \cap]c \overset{M^C}{|} b] = 0.$

g) $[a \overset{M}{|} b[\cap [a \overset{M^C}{|} d[= 0.$

h) $[a \overset{M}{|} b[\cap [c \overset{M^C}{|} b[= 0.$

i) $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap [a \overset{M^C}{|} \cdot\rangle = 0.$

j) $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap]a \overset{M^C}{|} \cdot\rangle = 0.$

k) $\langle\cdot \overset{M}{|} b] \cap \langle\cdot \overset{M^C}{|} b] = 0.$

l) $\langle\cdot \overset{M}{|} b[\cap \langle\cdot \overset{M^C}{|} b[= 0.$

<u>Beweis **361-18**</u>

1: Via **folk** gilt: $M \cap M^C = 0.$

2.a): Aus 1“$M \cap M^C = 0$”
folgt via **361-16**: $[a \overset{M}{|} b] \cap [a \overset{M^C}{|} d] = 0.$

2.b): Aus 1“$M \cap M^C = 0$”
folgt via **361-16**: $[a \overset{M}{|} b] \cap [c \overset{M^C}{|} b] = 0.$

2.c): Aus 1“$M \cap M^C = 0$”
folgt via **361-16**: $]a \overset{M}{|} b[\cap]a \overset{M^C}{|} d[= 0.$

2.d): Aus 1“$M \cap M^C = 0$”
folgt via **361-16**: $]a \overset{M}{|} b[\cap]c \overset{M^C}{|} b[= 0.$

2.e): Aus 1“$M \cap M^C = 0$”
folgt via **361-16**: $]a \overset{M}{|} b] \cap]a \overset{M^C}{|} d] = 0.$

2.f): Aus 1“$M \cap M^C = 0$”
folgt via **361-16**: $]a \overset{M}{|} b] \cap]c \overset{M^C}{|} b] = 0.$

2.g): Aus 1“$M \cap M^C = 0$”
folgt via **361-16**: $[a \overset{M}{|} b[\cap [a \overset{M^C}{|} d[= 0.$

2.h): Aus 1“$M \cap M^C = 0$”
folgt via **361-16**: $[a \overset{M}{|} b[\cap [c \overset{M^C}{|} b[= 0.$

2.i): Aus 1“$M \cap M^C = 0$”
folgt via **361-16**: $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap [a \overset{M^C}{|} \cdot\rangle = 0.$

2.j): Aus 1“$M \cap M^C = 0$”
folgt via **361-16**: $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap]a \overset{M^C}{|} \cdot\rangle = 0.$

2.k): Aus 1“$M \cap M^C = 0$”
folgt via **361-16**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b] \cap \langle\cdot \overset{M^C}{|} b] = 0.$

2.l): Aus 1“$M \cap M^C = 0$”
folgt via **361-16**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b[\cap \langle\cdot \overset{M^C}{|} b[= 0.$

$\square$

361-19. Die Aussage $p\_M.x$ auf E kann möglicher Weise freundlicher formuliert werden.

361-19(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p\_M.x$ *auf* E.

`ii)` "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" *und* "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p\_M\_\beta)$."

Beweis **361-19** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p\_M.x$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p\_M.x$ auf E"

folgt via **361-12(Def)**: $\boxed{E \subseteq \mathsf{dom}\, x}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **folk**: $\beta \in x[E]$.

`3:` Aus `VS` gleich "$p\_M.x$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $x[E] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus 2"$\beta \in x[E]$" und
aus 3"$x[E] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **folk**: $\beta \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`5:` Aus 4"$\beta \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: p_M_β.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p\_M\_\beta)}$

Beweis **361-19** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)$
$\wedge(\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x)) \Rightarrow (p\_M\_\beta))$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\gamma \in x[E]$.

1: Aus Thema0 "$\gamma \in x[E]$"
folgt via **folk**: $\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega,\gamma) \in x)$.

2: Aus 1 "$\ldots(\Omega \in E) \wedge ((\Omega,\gamma) \in x)$" und
aus VS gleich $\ldots\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x))$
$\Rightarrow (p\_M\_\beta)$
folgt via **folk**: p_M_γ.

3: Aus 2 "p_M_γ"
folgt via **41-25**: $\gamma \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ergo Thema0: $\forall\gamma : (\gamma \in x[E]) \Rightarrow (\gamma \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{“}x[E] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle\text{”}}$

1: Aus VS gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x\ldots$" und
aus A1 gleich "$x[E] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **361-12(Def)**: $p\_M.x$ auf E.

□

361-20. Auch die Aussage $\neg(p\_M.x)$ auf E kann eventuell ansprechender fomuliert werden.

361-20(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\neg(p\_M.x)$ *auf* E.

`ii)` "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" *und* "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(p\_M\_\beta))$".

Beweis **361-20** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\neg(p\_M.x)$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\neg(p\_M.x)$ auf E”

folgt via **361-12(Def)**: $\boxed{E \subseteq \mathsf{dom}\, x}$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\neg(p\_M.x)$ auf E”

folgt via **361-12(Def)**: $x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$.

`Thema1.3` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Es gilt: $(p\_M\_\beta) \vee (\neg(p\_M\_\beta))$.

`wfFallunterscheidung`

`2.1.Fall` p_M_β.

`3.1:` Aus `Thema1.2`“$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$”
folgt via **folk**: $\beta \in x[E]$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`“p_M_β”
folgt via **41-25**: $\beta \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `3.1`“$\beta \in x[E]$” und
aus `3.2`“$\beta \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **folk**: $\beta \in x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`5:` Aus `4`“$\beta \in x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **folk**: $0 \neq x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`6:` Aus `1.2`
folgt: $x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\neg(p\_M\_\beta)$.

Ergo `Thema1.3`: $\boxed{\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(p\_M\_\beta))}$

<u>Beweis **361-20**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)$
$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(p\_M\_\beta)))$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\gamma \in x[E]$.

`1:` Aus `Thema0` "$\gamma \in x[E]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \gamma) \in x)$.

`2:` Aus `1` "$\ldots(\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \gamma) \in x)$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x))$
$\Rightarrow (\neg(p\_M\_\beta))$"
folgt: $\neg(p\_M\_\gamma)$.

`3:` Via **41-25** gilt: $(p\_M\_\gamma) \Leftrightarrow (\gamma \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $\neg(\gamma \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\gamma \notin [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema0`: $\forall \gamma : (\gamma \in x[E]) \Rightarrow (\gamma \notin [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **361-13**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0\text{”}}$

`1:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `A1` gleich "$x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$"
folgt via **361-12(Def)**: $\neg(p\_M.x)$ auf E.

□

361-21. Die Aussage $x.M\_q$ auf E kann möglicher Weise freundlicher formuliert werden.

361-21(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x.M\_q$ *auf* E.

`ii)` "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" *und* "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta\_M\_q)$."

Beweis **361-21** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $x.M\_q$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x.M\_q$ auf E"

folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$

`Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `Thema1`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **folk**: $\beta \in x[E]$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x.M\_q$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} q]$.

`4:` Aus `2`"$\beta \in x[E]$" und
aus `3`"$x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{|} q]$"
folgt via **folk**: $\beta \in \langle \cdot \overset{M}{|} q]$.

`5:` Aus `4`"$\beta \in \langle \cdot \overset{M}{|} q]$"
folgt via **41-25**: β_M_q.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta\_M\_q)$

Beweis **361-21** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)$
$\wedge(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta\_M\_q))$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\gamma \in x[E]$.

`1:` Aus `Thema0`"$\gamma \in x[E]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \gamma) \in x)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \gamma) \in x)$" und
aus `VS` gleich $\ldots \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x))$
$\Rightarrow (\beta\_M\_q)$
folgt via **folk**: γ_M_q.

`3:` Aus `2`"γ_M_q"
folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle \cdot \overset{M}{\mid} q]$.

Ergo `Thema0`: $\forall \gamma : (\gamma \in x[E]) \Rightarrow (\gamma \in \langle \cdot \overset{M}{\mid} q])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \Big| \text{"}x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{\mid} q]\text{"}}$

`1:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `A1` gleich "$x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{M}{\mid} q]$"
folgt via **361-12(Def)**: $x.M\_q$ auf E.

□

361-22. Auch die Aussage $\neg(x.M\_q)$ auf E kann eventuell ansprechender fomuliert werden.

361-22(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\neg(x.M\_q)$ *auf* E.

`ii)` *"*$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$*" und "*$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(\beta\_M\_q))$*"*.

Beweis **361-22** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich $\neg(x.M\_q)$ auf E.

1.1: Aus VS gleich "$\neg(x.M\_q)$ auf E"

folgt via **361-12(Def)**: $\boxed{E \subseteq \mathrm{dom}\, x}$

1.2: Aus VS gleich "$\neg(x.M\_q)$ auf E"

folgt via **361-12(Def)**: $x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q] = 0$.

Thema1.3 $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

2: Es gilt: $(\beta\_M\_q) \vee (\neg(\beta\_M\_q))$.

wfFallunterscheidung

2.1.Fall β_M_q.

3.1: Aus Thema1.2"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **folk**: $\beta \in x[E]$.

3.2: Aus 2.1.Fall"β_M_q"
folgt via **41-25**: $\beta \in \langle\cdot \overset{M}{|} q]$.

4: Aus 3.1"$\beta \in x[E]$" und
aus 3.2"$\beta \in \langle\cdot \overset{M}{|} q]$"
folgt via **folk**: $\beta \in x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q]$.

5: Aus 4"$\beta \in x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q]$"
folgt via **folk**: $0 \neq x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q]$.

6: Aus 1.2
folgt: $x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q] = 0$.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$\neg(\beta\_M\_q)$.

Ergo Thema1.3: $\boxed{\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(\beta\_M\_q))}$

<u>Beweis **361-22**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)$
$\wedge(\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(\beta\_M\_q)))$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\gamma \in x[E]$.

`1`: Aus `Thema0` “ $\gamma \in x[E]$ ”
folgt via **folk**: $\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega,\gamma) \in x)$.

`2`: Aus `1` “ $\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega,\gamma) \in x)$ ” und
aus `VS` gleich “ $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x))$
$\Rightarrow (\neg(\beta\_M\_q))$ ”
folgt: $\neg(\gamma\_M\_q)$.

`3`: Via **41-25** gilt: $(\gamma\_M\_q) \Leftrightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} q])$.

`4`: Aus `3` und
aus `2`
folgt: $\neg(\gamma \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} q])$.

`5`: Aus `4`
folgt: $\gamma \notin \langle\cdot \overset{M}{\mid} q]$.

Ergo `Thema0`: $\forall\gamma : (\gamma \in x[E]) \Rightarrow (\gamma \notin \langle\cdot \overset{M}{\mid} q])$.

Konsequenz via **361-13**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“ } x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} q] = 0 \text{ ”}}$

`1`: Aus `VS` gleich “ $E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$ ” und
aus `A1` gleich “ $x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} q] = 0$ ”
folgt via **361-12(Def)**: $\neg(x.M\_q)$ auf E.

□

361-23. Auch $x.M.y$ auf E kann mit Hilfe von Quantoren beschrieben werden.

361-23(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x.M.y$ *auf* E.

`ii)` "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" *und*
"$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta{\_}M{\_}\gamma)$".

<u>Beweis **361-23**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x.M.y$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x.M.y$ auf E”

folgt via **361-12(Def)**: $\boxed{E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)}$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$x.M.y$ auf E”
folgt via **361-12(Def)**: $\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq M$.

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x) \wedge ((\alpha,\gamma) \in y)$.

`2:` Aus `Thema1.3`“$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x) \wedge ((\alpha,\gamma) \in y)$”
folgt via **361-10**: $(\beta,\gamma) \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$.

`3:` Aus 2“$(\beta,\gamma) \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$” und
aus `1.2`“$\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq M$”
folgt via **folk**: $(\beta,\gamma) \in M$.

`4:` Aus `3`
folgt: β_M_γ.

Ergo `Thema1.3`:

$$\boxed{\forall \alpha,\beta,\gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x) \wedge ((\alpha,\gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta\_M\_\gamma)}$$

<u>Beweis **361-23**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta\_M\_\gamma)).$

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\delta \in \mathsf{paar}(x, y)[E].$

1: Aus Thema0“ $\delta \in \mathsf{paar}(x, y)[E]$ ”
folgt via **361-10**:
$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge(\delta = (\Phi, \Gamma)).$$

2: Aus 1“ $\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \ldots$ ” und
aus VS gleich
“ $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta\_M\_\gamma)$ ”
folgt: $\Phi\_M\_\Gamma.$

3: Aus 2
folgt: $(\Phi, \Gamma) \in M.$

4: Aus 1“ $\ldots \delta = (\Phi, \Gamma)$ ” und
aus 3
folgt: $\delta \in M.$

Ergo Thema0: $\forall \delta : (\delta \in \mathsf{paar}(x, y)[E]) \Rightarrow (\delta \in M).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“} \mathsf{paar}(x, y)[E] \subseteq M \text{”}}$

1: Aus VS gleich “ $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) \ldots$ ” und
aus A1 gleich “ $\mathsf{paar}(x, y)[E] \subseteq M$ ”
folgt via **316-12(Def)**: $x.M.y$ auf $E.$

□

361-24. Für $\neg(x.M.y)$ auf E ist ein nahe liegendes Kriterium verfügbar.

361-24(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\neg(x.M.y)$ *auf* E.

`ii)` "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" *und*
"$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\neg(\beta\_M\_\gamma))$".

<u>Beweis **361-24**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $\neg(x.M.y)$ auf E.

$\texttt{1.1:}$ Aus $\texttt{VS}$ gleich "$\neg(x.M.y)$ auf E"

folgt via **361-12(Def)**: $\boxed{E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)}$

$\texttt{1.2:}$ Aus $\texttt{VS}$ gleich "$\neg(x.M.y)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E] = 0$.

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x) \wedge ((\alpha,\gamma) \in y)$.

$\texttt{2:}$ Aus $\texttt{Thema1.3}$"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x) \wedge ((\alpha,\gamma) \in y)$"
folgt via **361-10**: $(\beta,\gamma) \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$.

$\texttt{3:}$ Aus $\texttt{2}$"$(\beta,\gamma) \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$" und
aus $\texttt{1.2}$"$M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E] = 0$"
folgt via **161-1**: $(\beta,\gamma) \notin M$.

$\texttt{4:}$ Aus $\texttt{3}$
folgt via **30-3**: $\neg(\beta\_M\_\gamma)$.

Ergo $\texttt{Thema1.3}$:

$$\boxed{\forall \alpha,\beta,\gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha,\beta) \in x) \wedge ((\alpha,\gamma) \in y)) \Rightarrow (\neg(\beta\_M\_\gamma))}$$

<u>Beweis **361-24**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $\mathtt{VS}$ gleich $(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\neg(\beta\_M\_\gamma)))$.

$\boxed{\mathtt{Thema0}}$ $\delta \in \mathsf{paar}(x, y)[E]$.

$\mathtt{1:}$ Aus $\mathtt{Thema0}$ "$\delta \in \mathsf{paar}(x, y)[E]$"
folgt via **361-10**:
$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\delta = (\Phi, \Gamma)).$$

$\mathtt{2:}$ Aus $\mathtt{1}$ "$\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \ldots$" und
aus $\mathtt{VS}$ gleich
"$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\neg(\beta\_M\_\gamma))$"
folgt: $\neg(\Phi\_M\_\Gamma)$.

$\mathtt{3:}$ Aus $\mathtt{2}$
folgt via **30-3**: $(\Phi, \Gamma) \notin M$.

$\mathtt{4:}$ Aus $\mathtt{1}$ "$\ldots \delta = (\Phi, \Gamma)$" und
aus $\mathtt{3}$
folgt: $\delta \notin M$.

Ergo $\mathtt{Thema0}$: $\forall \delta : (\delta \in \mathsf{paar}(x, y)[E]) \Rightarrow (\delta \notin M)$.

Konsequenz via **361-13**: $\boxed{\mathtt{A1} \mid \text{“} M \cap \mathsf{paar}(x, y)[E] = 0 \text{”}}$

$\mathtt{1:}$ Aus $\mathtt{VS}$ gleich "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) \ldots$" und
aus $\mathtt{A1}$ gleich "$M \cap \mathsf{paar}(x, y)[E] = 0$"
folgt via **361-12(Def)**: $\neg(x.M.y)$ auf E.

□

361-25. Negationen und Komplement-Bildung haben miteinander zu tun.

<u>**361-25(Satz)**</u>

a) *Aus "$p\_M^C.x$ auf E" folgt "$\neg(p\_M.x)$ auf E".*

b) *Aus "p Menge" und "$\neg(p\_M.x)$ auf E" folgt "$p\_M^C.x$ auf E".*

c) *Aus "$x.M^C\_q$ auf E" folgt "$\neg(x.M\_q)$ auf E".*

d) *Aus "q Menge" und "$\neg(x.M\_q)$ auf E" folgt "$x.M^C\_q$ auf E".*

e) *"$\neg(x.M.y)$ auf E" genau dann, wenn "$x.M^C.y$ auf E".*

<u>Beweis **361-25**</u> a) VS gleich $p\_M^C.x$ auf E.

1: Aus VS gleich "$p\_M^C.x$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq [p \overset{M^C}{|} \cdot\rangle)$.

2: Via **361-18** gilt: $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap [p \overset{M^C}{|} \cdot\rangle = 0$.

3: Aus 2"$[p \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap [p \overset{M^C}{|} \cdot\rangle = 0$" und
aus 1"$x[E] \subseteq [p \overset{M^C}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **161-2**: $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap x[E] = 0$.

4: $x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} [p \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap x[E] \overset{3}{=} 0$.

5: Aus 1"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus 4"$x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle = \ldots = 0$"
folgt via **361-12(Def)**: $\neg(p\_M.x)$ auf E.

b) VS gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (\neg(p\_M.x) \text{ auf } E)$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots \neg(p\_M.x)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \neg(p\_M.x)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$.

...

<u>Beweis **361-25**</u> `b)` `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (\neg(p\_M.x \text{ auf } E))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in x[E]$.

`2.1:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in x[E]$” und
aus `1.2`“$x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$”
folgt via **161-1**: $\alpha \notin [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2.2:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in x[E]$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3.1:` Via **41-25** gilt: $(\alpha \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Leftrightarrow (p\_M\_\alpha)$.

`3.2:` Aus `VS` gleich “p Menge...” und
aus `2.2`“α Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: (p, α) Menge.

`4:` Aus `2.1`“$\alpha \notin [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$” und
aus `3.1`
folgt: $\neg(p\_M\_\alpha)$.

`5:` Aus `4`
folgt via **30-3**: $(p, \alpha) \notin M$.

`6:` Aus `5`“$(p, \alpha) \notin M$” und
aus `3.2`“(p, α) Menge”
folgt via **3-2**: $(p, \alpha) \in M^C$.

`7:` Aus `6`
folgt: $p\_M^C\_\alpha$.

`8:` Aus `7`“$p\_M^C\_\alpha$”
folgt via **41-25**: $\alpha \in [p \overset{M^C}{|} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[E]) \Rightarrow (\alpha \in [p \overset{M^C}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}x[E] \subseteq [p \overset{M^C}{|} \cdot\rangle\text{”}}$

...

<u>Beweis **361-25**</u> `b)` `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (\neg(p\_M.x \text{ auf } E))$.

...

`2:` Aus `1.1` "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A1` gleich "$x[E] \subseteq [p \overset{M^C}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **361-12**: $p\_M^C.x$ auf E.

`c)` `VS` gleich $x.M^C\_q$ auf E.

`1:` Aus `VS` gleich "$x.M^C\_q$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{M^C}{|} q])$.

`2:` Via **361-18** gilt: $\langle\cdot \overset{M}{|} q] \cap \langle\cdot \overset{M^C}{|} q] = 0$.

`3:` Aus `2` "$\langle\cdot \overset{M}{|} q] \cap \langle\cdot \overset{M^C}{|} q] = 0$" und
aus `1` "$x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{M^C}{|} q]$"
folgt via **161-2**: $\langle\cdot \overset{M}{|} q] \cap x[E] = 0$.

`4:` $x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q] \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} \langle\cdot \overset{M}{|} q] \cap x[E] \overset{3}{=} 0$.

`5:` Aus `1` "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `4` "$x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q] = \ldots = 0$"
folgt via **361-12(Def)**: $\neg(x.M\_q)$ auf E.

`d)` `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.M\_q) \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(x.M\_q)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(x.M\_q)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q] = 0$.

...

<u>Beweis **361-25**</u> `d)` `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.M\_q \text{ auf } E))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in x[E]$.

`2.1:` Aus `Thema1.3` "$\alpha \in x[E]$" und
aus `1.2` "$x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q] = 0$"
folgt via **161-1**: $\alpha \notin \langle\cdot \overset{M}{|} q]$.

`2.2:` Aus `Thema1.3` "$\alpha \in x[E]$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3.1:` Via **41-25** gilt: $(\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} q]) \Leftrightarrow (\alpha\_M\_q)$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "q Menge..." und
aus `2.2` "α Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (α, q) Menge.

`4:` Aus `2.1` "$\alpha \notin \langle\cdot \overset{M}{|} q]$" und
aus `3.1`
folgt: $\neg(\alpha\_M\_q)$.

`5:` Aus `4`
folgt via **30-3**: $(\alpha, q) \notin M$.

`6:` Aus `5` "$(\alpha, q) \notin M$" und
aus `3.2` "(α, q) Menge"
folgt via **3-2**: $(\alpha, q) \in M^C$.

`7:` Aus `6`
folgt: $\alpha\_M^C\_q$.

`8:` Aus `7` "$\alpha\_M^C\_q$"
folgt via **41-25**: $\alpha \in \langle\cdot \overset{M^C}{|} q]$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[E]) \Rightarrow (\alpha \in \langle\cdot \overset{M^C}{|} q])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{"} x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{M^C}{|} q] \text{"}}$

...

<u>Beweis **361-25**</u> `d)` `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.M\_q \text{ auf } E))$.

...

`2:` Aus `1.1` “$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$” und
aus `A1` gleich “$x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{M^C}{|} q]$”
folgt via **361-12**: $x.M^C\_q \text{ auf } E$.

`e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\neg(x.M.y) \text{ auf } E$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\neg(x.M.y)$ auf E”
folgt via **361-12(Def)**:
$$(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E] = 0).$$

`2:` Via **KG**$\cap$ gilt: $\mathsf{paar}(x,y)[E] \cap M = M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E]$.

`3:` Aus `2` und
aus `1` “$\ldots M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E] = 0$”
folgt: $\mathsf{paar}(x,y)[E] \cap M = 0$.

`3:` Aus `2` “$\mathsf{paar}(x,y)[E] \cap M = 0$”
folgt via **3-7**: $\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq M^C$.

`4:` Aus `1` “$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) \ldots$” und
aus `3` “$\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq M^C$”
folgt via **361-12(Def)**: $x.M^C.y \text{ auf } E$.

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x.M^C.y \text{ auf } E$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x.M^C.y$ auf E”
folgt via **361-12(Def)**: $(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq M^C)$.

`2:` Aus `1` “$\ldots \mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq M^C$”
folgt via **3-7**: $\mathsf{paar}(x,y)[E] \cap M = 0$.

`3:` Via **KG**$\cap$ gilt: $M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E] = \mathsf{paar}(x,y)[E] \cap M$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E] = 0$.

`5:` Aus `1` “$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) \ldots$” und
aus `4` “$M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E] = 0$”
folgt via **361-12(Def)**: $\neg(x.M.y) \text{ auf } E$.

□

361-26. Fehlende Negationen werden in die Essays eingebracht.

361-26(Satz)

a) *"$\neg(p\_M.x$ auf $E)$" genau dann, wenn*
"$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" oder "$x[E] \not\subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

b) *"$\neg(\neg(p\_M.x)$ auf $E)$" genau dann, wenn*
"$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" oder "$0 \neq x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$".

c) *"$\neg(x.M\_q$ auf $E)$" genau dann, wenn*
"$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" oder "$x[E] \not\subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} q]$".

d) *"$\neg(\neg(x.M\_q)$ auf $E)$" genau dann, wenn*
"$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" oder "$0 \neq x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q]$".

e) *"$\neg(x.M.y$ auf $E)$" genau dann, wenn*
"$E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" oder "$\mathsf{paar}(x,y)[E] \not\subseteq M$".

f) *"$\neg(\neg(x.M.y)$ auf $E)$" genau dann, wenn*
"$E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" oder "$0 \neq M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E]$".

Beweis **361-26** a)

1: Via **361-12(Def)** gilt:

$$(p\_M.x \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)).$$

2: Aus 1
folgt:

$$(\neg(p\_M.x \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(x[E] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle))).$$

3: Aus 2
folgt:

$$(\neg(p\_M.x \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (x[E] \not\subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle)).$$

<u>Beweis **361-26**</u> `b)`

`1:` Via **361-12(Def)** gilt:

$$(\neg(p\_M.x) \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap [\![p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle = 0)).$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$(\neg(\neg(p\_M.x) \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(x[E] \cap [\![p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle = 0))).$$

`3:` Aus `2` folgt:

$$(\neg(\neg(p\_M.x) \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (0 \neq x[E] \cap [\![p \overset{M}{\mid} \cdot\rangle)).$$

`c)`

`1:` Via **361-12(Def)** gilt:

$$(x.M\_q \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} q]\!])).$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$(\neg(x.M\_q \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} q]\!]))).$$

`3:` Aus `2` folgt:

$$(\neg(x.M\_q \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (x[E] \not\subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} q]\!])).$$

`d)`

`1:` Via **361-12(Def)** gilt:

$$(\neg(x.M\_q) \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} q]\!] = 0)).$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$(\neg(\neg(x.M\_q) \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} q]\!] = 0))).$$

`3:` Aus `2` folgt:

$$(\neg(\neg(x.M\_q) \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (0 \neq x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{\mid} q]\!])).$$

<u>Beweis **361-26**</u> `e)`

`1:` Via **361-12(Def)** gilt:

$$(x.M.y \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq M)).$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$(\neg(x.M.y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))) \vee (\neg(\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq M))).$$

`3:` Aus `2`
folgt:

$$(\neg(x.M.y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \vee (\mathsf{paar}(x,y)[E] \not\subseteq M)).$$

`f)`

`1:` Via **361-12(Def)** gilt:

$$(\neg(x.M.y) \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E] = 0)).$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$(\neg(\neg(x.M.y) \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))) \vee (\neg(M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E] = 0))).$$

`3:` Aus `2`
folgt:

$$(\neg(\neg(x.M.y) \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \vee (0 \neq M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E])).$$

$\square$

361-27. Alte und neue Konzepte passen außer in erwarteten Spezialfällen gut zueinander.

361-27(Satz)

a) *"$p \in .x$ auf E" genau dann, wenn "$p\_\mathsf{in}.x$ auf E".*

b) *"$p \notin .x$ auf E" genau dann, wenn "$\neg(p\_\mathsf{in}.x)$ auf E".*

c) *"$\neg(p \in .x$ auf $E)$" genau dann, wenn "$\neg(p\_\mathsf{in}.x$ auf $E)$".*

d) *"$\neg(p \notin .x$ auf $E)$" genau dann, wenn "$\neg(\neg(p\_\mathsf{in}.x)$ auf $E)$".*

e) *Aus "q Menge" und "$x. \in q$ auf E" folgt "$x.\mathsf{in}\_q$ auf E".*

f) *Aus "$x.\mathsf{in}\_q$ auf E" folgt "$x. \in q$ auf E".*

g) *Aus "$x. \notin q$ auf E" folgt "$\neg(x.\mathsf{in}\_q)$ auf E".*

h) *Aus "q Menge" und "$\neg(x.\mathsf{in}\_q)$ auf E" folgt "$x. \notin q$ auf E".*

i) *Aus "$\neg(x. \in q$ auf $E)$" folgt "$\neg(x.\mathsf{in}\_q$ auf $E)$".*

j) *Aus "q Menge" und "$\neg(x.\mathsf{in}\_q$ auf $E)$" folgt "$\neg(x. \in q$ auf $E)$".*

k) *Aus "q Menge" und "$\neg(x. \notin q$ auf $E)$" folgt "$\neg(\neg(x.\mathsf{in}\_q)$ auf $E)$".*

l) *Aus "$\neg(\neg(x.\mathsf{in}\_q))$ auf E" folgt "$\neg(x. \notin q$ auf $E)$".*

m) *"$x. \in .y$ auf E" genau dann, wenn "$x.\mathsf{in}.y$ auf E".*

n) *"$x. \notin .y$ auf E" genau dann, wenn "$\neg(x.\mathsf{in}.y)$ auf E".*

o) *"$\neg(x. \in .y$ auf $E)$" genau dann, wenn "$\neg(x.\mathsf{in}.y$ auf $E)$".*

p) *"$\neg(x. \notin .y$ auf $E)$" genau dann, wenn "$\neg(\neg(x.\mathsf{in}.y)$ auf $E)$".*

Beweis **361-27** a)

1.1: Via **361-6** gilt: $(p \in .x \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq [\![p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle)))$.

1.2: Via **316-12(Def)** gilt:

$$(p\_\mathsf{in}.x \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq [\![p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle))).$$

2: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt: $(p \in .x \text{ auf } E) \Leftrightarrow (p\_\mathsf{in}.x \text{ auf } E)$.

Beweis **361-27** `b)`

`1.1:` Via **361-6** gilt: $(p \notin .x \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap [\![p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle = 0))$.

`1.2:` Via **316-12(Def)** gilt:

$$(\neg(p\_\mathsf{in}.x) \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap [\![p \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot\rangle = 0)).$$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(p \notin .x \text{ auf } E) \Leftrightarrow (\neg(p\_\mathsf{in}.x) \text{ auf } E)$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(p \in .x \text{ auf } E) \Leftrightarrow (p\_\mathsf{in}.x \text{ auf } E)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(p \in .x \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg(p\_\mathsf{in}.x \text{ auf } E))$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(p \notin .x \text{ auf } E) \Leftrightarrow (\neg(p\_\mathsf{in}.x) \text{ auf } E)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(p \notin .x \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg(\neg(p\_\mathsf{in}.x) \text{ auf } E))$.

`e)` `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (x. \in q \text{ auf } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(q \text{ Menge}) \wedge (x. \in q \text{ auf } E)$"
folgt via **361-9**: $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]\!])$.

`2:` Aus `1.2`"$(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]\!])$"
folgt via **361-12(Def)**: $x.\mathsf{in}\_q \text{ auf } E$.

<u>Beweis **361-27**</u> `f)` `VS` gleich $x.\mathsf{in}\_q$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x.\mathsf{in}\_q$ auf E"

folgt via **361-12(Def)**: $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q])$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **folk**: $\beta \in x[E]$.

`3:` Aus `2`"$\beta \in x[E]$" und
aus `1.1`"$\ldots x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} q]$"
folgt via **folk**: $\beta \in \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$.

`4:` Aus `3`"$\beta \in \langle\cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$"
folgt via **361-4**: $\beta \in q$.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in q)\text{"}}$

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in q)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \in q$ auf E.

Beweis **361-27** `g)` `VS` gleich $x. \notin q$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x. \notin q$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in x[E] \cap \langle \cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`
> folgt via **folk**: $(\alpha \in x[E]) \wedge (\alpha \in \langle \cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q])$.
>
> `3.1:` Aus 2"$\alpha \in x[E] \ldots$"
> folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.
>
> `3.2:` Aus 2"$\ldots \alpha \in \langle \cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]$"
> folgt via **361-4**: $\alpha \in q$.
>
> `4:` Aus `VS` gleich "$x. \notin q$ auf E" und
> aus `3.1`"$\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in q)$"
> folgt via **228-1(Def)**: $\alpha \notin q$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[E] \cap \langle \cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q]) \Rightarrow (\alpha \notin x[E] \cap \langle \cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q])$.

Konsequenz via **folk**: `A1` | "$x[E] \cap \langle \cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q] = 0$"

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `A1` gleich "$x[E] \cap \langle \cdot \overset{\mathsf{in}}{|} q] = 0$"
folgt via **361-12(Def)**: $\neg(x.\mathsf{in}\_q)$ auf E.

`h)` `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.\mathsf{in}\_q) \text{ auf } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(x.\mathsf{in}\_q)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap [q \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot \rangle = 0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "q Menge..." und
aus `1`"$(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap [q \overset{\mathsf{in}}{|} \cdot \rangle = 0)$"
folgt via **361-9**: $x. \notin q$ auf E.

<u>Beweis **361-27**</u> `i)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $(x.\mathsf{in}\_q \text{ auf } E) \Rightarrow (x. \in q \text{ auf } E)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x. \in q \text{ auf } E)) \Rightarrow (\neg(x.\mathsf{in}\_q \text{ auf } E))$.

`j)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt:
$((q \text{ Menge}) \wedge (x. \in q \text{ auf } E)) \Rightarrow (x.\mathsf{in}\_q \text{ auf } E)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.\mathsf{in}\_q \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(x. \in q \text{ auf } E))$.

`k)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt:
$((q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.\mathsf{in}\_q) \text{ auf } E)) \Rightarrow (x. \notin q \text{ auf } E)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x. \notin q \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(\neg(x.\mathsf{in}\_q) \text{ auf } E))$.

`l)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $(x. \notin q \text{ auf } E) \Rightarrow (\neg(x.\mathsf{in}\_q) \text{ auf } E)$

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(\neg(x.\mathsf{in}\_q) \text{ auf } E)) \Rightarrow (\neg(x. \notin q \text{ auf } E))$.

`m)`

`1.1:` Via **361-11** gilt:
$(x. \in .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq \mathsf{in}))$.

`1.2:` Via **316-12(Def)** gilt:
$(x.\mathsf{in}.y \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq \mathsf{in}))$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(x. \in .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow (x.\mathsf{in}.y \text{ auf } E)$.

Beweis **361-27** `n)`

`1.1:` Via **361-11** gilt:
$$(x. \notin .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\mathsf{paar}(x, y)[E] \cap \mathsf{in} = 0)).$$

`1.2:` Via **316-26** gilt:
$$(\neg(x.\mathsf{in}.y) \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\mathsf{in} \cap \mathsf{paar}(x, y)[E] = 0)).$$

`1.3:` Via **KG**$\cap$ gilt: $\mathsf{paar}(x, y)[E] \cap \mathsf{in} = \mathsf{in} \cap \mathsf{paar}(x, y)[E]$.

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $(x. \notin .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow (\neg(x.\mathsf{in}.y \text{ auf } E))$.

`o)`

`1.1:` Via **361-11** gilt:
$$(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \vee (\mathsf{paar}(x, y)[E] \not\subseteq \mathsf{in})).$$

`1.2:` Via **316-26** gilt:
$$(\neg(x.\mathsf{in}.y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \vee (\mathsf{paar}(x, y)[E] \not\subseteq \mathsf{in})).$$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg(x.\mathsf{in}.y \text{ auf } E))$.

`p)`

`1.1:` Via **361-11** gilt:
$$(\neg(x. \notin .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \vee (0 \neq \mathsf{paar}(x, y)[E] \cap \mathsf{in})).$$

`1.2:` Via **316-26** gilt:
$$(\neg(\neg(x.\mathsf{in}.y) \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \vee (0 \neq \mathsf{in} \cap \mathsf{paar}(x, y)[E])).$$

`1.3:` Via **KG**$\cap$ gilt: $\mathsf{paar}(x, y)[E] \cap \mathsf{in} = \mathsf{in} \cap \mathsf{paar}(x, y)[E]$.

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $(\neg(x. \notin .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg(\neg(x.\mathsf{in}.y) \text{ auf } E))$.

$\square$

Mengenlehre: $p \subseteq .x$, $x. \subseteq q$, $x. \subseteq .y$, $p \not\subseteq .x$, $x. \not\subseteq q$, $x. \not\subseteq .y$ auf E.
$p \subset .x$, $x. \subset q$, $x. \subset .y$, $p \not\subset .x$, $x. \not\subset q$, $x. \not\subset .y$ auf E.

Ersterstellung: 21/11/15 **Letzte Änderung: 27/11/15**

362-1. In Anlehnung an **228-1(Def)** werden hier die Aussagen $p \subseteq .x$, $x. \subseteq q$, $x. \subseteq .y$, $p \not\subseteq .x$, $x. \not\subseteq q$, $x. \not\subseteq .y$ auf E definiert. Korrespondierende Aussagen mit $\subset$ an Stelle von $\subseteq$ kommen später.

362-1(Definition)

1) "$p \subseteq .x$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ und
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \subseteq \beta).$$

2) "$x. \subseteq q$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ und
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \subseteq q).$$

3) "$x. \subseteq .y$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$ und
$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \subseteq \gamma).$$

4) "$p \not\subseteq .x$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ und
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \not\subseteq \beta).$$

5) "$x. \not\subseteq q$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ und
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \not\subseteq q).$$

6) "$x. \not\subseteq .y$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,)$ und
$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \not\subseteq \gamma).$$

362-2. Im Kontext von **Suite V** interessiert der Zusammenhang von $p \subseteq .x$ etc. mit $p\_\mathsf{sse}.x$ etc. Dies soll hier untersucht werden.

362-2(Satz)

a) *“$p \subseteq .x$ auf E” genau dann, wenn “$p\_\mathsf{sse}.x$ auf E”.*

b) *Aus “q Menge” und “$x. \subseteq q$ auf E” folgt “$x.\mathsf{sse}\_q$ auf E”.*

c) *Aus “$x.\mathsf{sse}\_q$ auf E” folgt “$x. \subseteq q$ auf E”.*

d) *“$x. \subseteq .y$ auf E” genau dann, wenn “$x.\mathsf{sse}.y$ auf E”.*

e) *Aus “$p \not\subseteq .x$ auf E” folgt “$\neg(p\_\mathsf{sse}.x)$ auf E”.*

f) *Aus “p Menge” und “$\neg(p\_\mathsf{sse}.x)$ auf E” folgt “$p \not\subseteq .x$ auf E”.*

g) *Aus “$x. \not\subseteq q$ auf E” folgt “$\neg(x.\mathsf{sse}\_q)$ auf E”.*

h) *Aus “q Menge” und “$\neg(x.\mathsf{sse}\_q)$ auf E” folgt “$x. \not\subseteq q$ auf E”.*

i) *“$x. \not\subseteq .y$ auf E” genau dann, wenn “$\neg(x.\mathsf{sse}.y)$ auf E”.*

Beweis **362-2**

---

sse-**Notation**.

---

a) $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \subseteq .x$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \subseteq .x$"
folgt via **362-1(Def)**: $E \subseteq \mathrm{dom}\, x$.

> `Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.
>
> `2:` Aus `VS` gleich "$p \subseteq .x$ auf E" und
> aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
> folgt via **362-1(Def)**: $p \subseteq \beta$.
>
> `3:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$"
> folgt via **folk**: β Menge.
>
> `4:` Aus `2`"$p \subseteq \beta$" und
> aus `3`"β Menge"
> folgt via **61-4**: p sse β.

Ergo `Thema1.2`: `A1` "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \text{ sse } \beta)$"

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq \mathrm{dom}\, x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \text{ sse } \beta)$"
folgt via **361-19**: p_sse.x auf E.

Beweis **362-2** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $p\_\mathsf{sse}.x$ auf E.

1.1: Aus VS gleich "$p\_\mathsf{sse}.x$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

2: Aus VS gleich "$p\_\mathsf{sse}.x$ auf E" und
aus Thema1.2"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **361-19**: $p\ \mathsf{sse}\ \beta$.

3: Aus 2"$p\ \mathsf{sse}\ \beta$"
folgt via **61-4**: $p \subseteq \beta$.

Ergo Thema1.2: A1 | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \subseteq \beta)$"

2: Aus 1.1"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \subseteq \beta)$"
folgt via **362-1(Def)**: $p \subseteq .x$ auf E.

b) VS gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (x. \subseteq q \text{ auf } E)$.

1.1: Aus VS gleich "$x. \subseteq q$"
folgt via **362-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

2: Aus VS gleich "$\ldots x. \subseteq q$ auf E" und
aus Thema1.2"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **362-1(Def)**: $\beta \subseteq q$.

3: Aus 2"$\beta \subseteq q$" und
aus VS gleich "q Menge $\ldots$"
folgt via **61-4**: $\beta\ \mathsf{sse}\ q$.

Ergo Thema1.2: A1 | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta\ \mathsf{sse}\ q)$"

2: Aus 1.1"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta\ \mathsf{sse}\ q)$"
folgt via **361-21**: $x.\mathsf{sse}\_q$ auf E.

<u>Beweis **362-2**</u> `c)` `VS` gleich $x.\mathsf{sse}\_q$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x.\mathsf{sse}\_q$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

> `Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.
>
> `2:` Aus `VS` gleich "$x.\mathsf{sse}\_q$ auf E" und
> aus `Thema1.2` "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
> folgt via **361-21**: $\beta \;\mathsf{sse}\; q$.
>
> `3:` Aus `2` "$\beta \;\mathsf{sse}\; q$"
> folgt via **61-4**: $\beta \subseteq q$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \subseteq q)$"

`2:` Aus `1.1` "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \subseteq q)$"
folgt via **362-1(Def)**: $x. \subseteq q$ auf E.

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x. \subseteq .y$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x. \subseteq .y$"
folgt via **362-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

> `Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.
>
> `2:` Aus `VS` gleich "$x. \subseteq .y$ auf E" und
> aus `Thema1.2` "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$"
> folgt via **362-1(Def)**: $\beta \subseteq \gamma$.
>
> `3:` Aus `Thema1.2` "$\ldots (\alpha, \gamma) \in y$"
> folgt via **folk**: γ Menge.
>
> `4:` Aus `2` "$\beta \subseteq \gamma$" und
> aus `3` "γ Menge"
> folgt via **61-4**: $\beta \;\mathsf{sse}\; \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:
`A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \;\mathsf{sse}\; \gamma)$"

`2:` Aus `1.1` "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \;\mathsf{sse}\; \gamma)$"
folgt via **361-23**: $x.\mathsf{sse}.y$ auf E.

Beweis **362-2** `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x.\mathsf{sse}.y$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x.\mathsf{sse}.y$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

`Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x.\mathsf{sse}.y$ auf E" und
aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$"
folgt via **361-23**: $\beta\ \mathsf{sse}\ \gamma$.

`3:` Aus 2"$\beta\ \mathsf{sse}\ \gamma$"
folgt via **61-4**: $\beta \subseteq \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \subseteq \gamma)$"

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \subseteq \gamma)$"
folgt via **362-1(Def)**: $x. \subseteq .y$ auf E.

`e)` `VS` gleich $p \not\subseteq .x$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \not\subseteq .x$"
folgt via **362-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \not\subseteq .x$ auf E" und
aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **362-1(Def)**: $p \not\subseteq \beta$.

`3:` Aus 2"$p \not\subseteq \beta$"
folgt via **61-5**: $\neg(p\ \mathsf{sse}\ \beta)$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(p\ \mathsf{sse}\ \beta))$"

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(p\ \mathsf{sse}\ \beta))$"
folgt via **361-20**: $\neg(p\_\mathsf{sse}.x)$ auf E.

<u>Beweis **362-2**</u> `f)` `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (\neg(p\_\mathsf{sse}.x) \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\neg(p\_\mathsf{sse}.x)$ auf E”
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots \neg(p\_\mathsf{sse}.x)$ auf E” und
aus `Thema1.2`“$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$”
folgt via **361-20**: $\neg(p \,\mathsf{sse}\, \beta)$.

`3:` Aus `2`“$\neg(p \,\mathsf{sse}\, \beta)$”
folgt via **61-5**: $(p \not\subseteq \beta) \vee (p \text{ Unmenge}) \vee (\beta \text{ Unmenge})$.

`4.1:` Aus `3` und
aus `VS` gleich “p Menge…”
folgt: $(p \not\subseteq \beta) \vee (\beta \text{ Unmenge})$.

`4.2:` Aus `Thema1.2`“$\ldots (\alpha, \beta) \in x$”
folgt via **folk**: β Menge.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $p \not\subseteq \beta$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \not\subseteq \beta)$”

`2:` Aus `1.1`“$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \not\subseteq \beta)$”
folgt via **362-1(Def)**: $p \not\subseteq .x$ auf E.

<u>Beweis **362-2**</u> `g)` `VS` gleich $x. \not\subseteq q$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x. \not\subseteq q$"
folgt via **362-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

> `Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.
>
> `2:` Aus `VS` gleich "$x. \not\subseteq q$ auf E" und
> aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
> folgt via **362-1(Def)**: $\beta \not\subseteq q$.
>
> `3:` Aus `2`"$\beta \not\subseteq q$"
> folgt via **61-5**: $\neg(\beta\ \mathsf{sse}\ q)$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(\beta\ \mathsf{sse}\ q))$"

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(\beta\ \mathsf{sse}\ q))$"
folgt via **361-22**: $\neg(x.\mathsf{sse}\_q)$ auf E.

<u>Beweis **362-2**</u> `h)` `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.\mathsf{sse}\_q) \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{sse}\_q)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.
`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(x.\mathsf{sse}\_q)$ auf E" und aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$" folgt via **361-22**:	$\neg(\beta \;\mathsf{sse}\; q)$.
`3:` Aus `2`"$\neg(\beta \;\mathsf{sse}\; q)$" folgt via **61-5**:	$(\beta \not\subseteq q) \vee (\beta \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.
`4.1:` Aus `3` und aus `VS` gleich "q Menge…" folgt:	$(\beta \not\subseteq q) \vee (\beta \text{ Unmenge})$.
`4.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$" folgt via **folk**:	β Menge.
`5:` Aus `4.1` und aus `4.2` folgt:	$\beta \not\subseteq q$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \not\subseteq q)$"

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \not\subseteq q)$"
folgt via **362-1(Def)**: $x. \not\subseteq q$ auf E.

Beweis **362-2** `i)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x.\not\subseteq.y$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x.\not\subseteq.y$"
folgt via **362-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x.\not\subseteq.y$ auf E" und
aus `Thema1.2` "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$"
folgt via **362-1(Def)**: $\beta \not\subseteq \gamma$.

`3:` Aus 2 "$\beta \not\subseteq \gamma$"
folgt via **61-5**: $\neg(\beta\ \mathsf{sse}\ \gamma)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\neg(\beta\ \mathsf{sse}\ \gamma))$"

`2:` Aus `1.1` "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y))$
$\Rightarrow (\neg(\beta\ \mathsf{sse}\ \gamma))$"
folgt via **361-24**: $\neg(x.\mathsf{sse}.y)$ auf E.

Beweis **362-2** `i)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\neg(x.\mathsf{sse}.y)$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{sse}.y)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

`Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{sse}.y)$ auf E" und
aus `Thema1.2` "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$"
folgt via **361-24**: $\neg(\beta\ \mathsf{sse}\ \gamma)$.

`3:` Aus `2` "$\neg(\beta\ \mathsf{sse}\ \gamma)$"
folgt via **61-5**: $(\beta \not\subseteq \gamma) \vee (\beta$ Unmenge$) \vee (\gamma$ Unmenge$)$.

`4.1:` Aus `Thema1.2` "$\ldots (\alpha, \beta) \in x \ldots$"
folgt via **folk**: β Menge.

`4.2:` Aus `Thema1.2` "$\ldots (\alpha, \gamma) \in y$"
folgt via **folk**: γ Menge.

`5:` Aus `3`,
aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $\beta \not\subseteq \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \not\subseteq \gamma)$"

`2:` Aus `1.1` "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \not\subseteq \gamma)$"
folgt via **362-1(Def)**: $x. \not\subseteq .y$ auf E.

$\square$

362-3. Via Negation folgt aus **362-2** Vorliegendes.

362-3(Satz)

a) *“$\neg(p \subseteq .x$ auf $E)$” genau dann, wenn “$\neg(p\_\mathsf{sse}.x$ auf $E)$”.*

b) *Aus “$\neg(x. \subseteq q$ auf $E)$” folgt “$\neg(x.\mathsf{sse}\_q$ auf $E)$”.*

c) *Aus “q Menge” und “$\neg(x.\mathsf{sse}\_q$ auf $E)$” folgt “$\neg(x. \subseteq q$ auf $E)$”.*

d) *“$\neg(x. \subseteq .y$ auf $E)$” genau dann, wenn “$\neg(x.\mathsf{sse}.y$ auf $E)$”.*

e) *Aus “p Menge” und “$\neg(p \not\subseteq .x$ auf $E)$” folgt “$\neg(\neg(p\_\mathsf{sse}.x)$ auf $E)$”.*

f) *Aus “$\neg(\neg(p\_\mathsf{sse}.x)$ auf $E)$” folgt “$\neg(p \not\subseteq .x$ auf $E)$”.*

g) *Aus “q Menge” und “$\neg(x. \not\subseteq q$ auf $E)$” folgt “$\neg(\neg(x.\mathsf{sse}\_q)$ auf $E)$”.*

h) *Aus “$\neg(\neg(x.\mathsf{sse}\_q)$ auf $E)$” folgt “$\neg(x. \not\subseteq q$ auf $E)$”.*

i) *“$\neg(x. \not\subseteq .y$ auf $E)$” genau dann, wenn “$\neg(\neg(x.\mathsf{sse}.y)$ auf $E)$”.*

Beweis **362-3** a)

1: Via **362-2** gilt: $(p \subseteq .x \text{ auf } E) \Leftrightarrow (p\_\mathsf{sse}.x \text{ auf } E)$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg(p \subseteq .x \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg(p\_\mathsf{sse}.x \text{ auf } E))$.

b)

1: Via **362-2** gilt: $(x.\mathsf{sse}\_q \text{ auf } E) \Rightarrow (x. \subseteq q \text{ auf } E)$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg(x. \subseteq q \text{ auf } E)) \Rightarrow (\neg(x.\mathsf{sse}\_q \text{ auf } E))$.

c)

1: Via **362-2** gilt: $((q \text{ Menge}) \wedge (x. \subseteq q \text{ auf } E)) \Rightarrow (x.\mathsf{sse}\_q \text{ auf } E)$.

2: Aus 1 folgt: $((q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.\mathsf{sse}\_q \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(x. \subseteq q \text{ auf } E))$.

<u>Beweis</u> **362-3** d)

1: Via **362-2** gilt: $(x. \subseteq .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow (x.\mathsf{sse}.y \text{ auf } E)$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg(x. \subseteq .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg(x.\mathsf{sse}.y \text{ auf } E))$.

e)

1: Via **362-2** gilt: $((p \text{ Menge}) \wedge (\neg(p\_\mathsf{sse}.x) \text{ auf } E)) \Rightarrow (p \not\subseteq .x \text{ auf } E)$.

2: Aus 1 folgt: $((p \text{ Menge}) \wedge (\neg(p \not\subseteq .x \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(\neg(p\_\mathsf{sse}.x) \text{ auf } E))$.

f)

1: Via **362-2** gilt $(p \not\subseteq .x \text{ auf } E) \Rightarrow (\neg(p\_\mathsf{sse}.x) \text{ auf } E)$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg(\neg(p\_\mathsf{sse}.x) \text{ auf } E)) \Rightarrow (\neg(p \not\subseteq .x \text{ auf } E))$.

g)

1: Via **362-2** gilt: $((q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.\mathsf{sse}\_q) \text{ auf } E)) \Rightarrow (x. \not\subseteq q \text{ auf } E)$.

2: Aus 1 folgt: $((q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x. \not\subseteq q \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(\neg(x.\mathsf{sse}\_q) \text{ auf } E))$.

h)

1: Via **362-2** gilt: $(x. \not\subseteq q \text{ auf } E) \Rightarrow (\neg(x.\mathsf{sse}\_q) \text{ auf } E)$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg(\neg(x.\mathsf{sse}\_q) \text{ auf } E)) \Rightarrow (\neg(x. \not\subseteq q \text{ auf } E))$.

i)

1: Via **362-2** gilt: $(x. \not\subseteq .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow (\neg(x.\mathsf{sse}.y) \text{ auf } E)$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg(x. \not\subseteq .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg(\neg(x.\mathsf{sse}.y) \text{ auf } E))$.

□

362-4. In Anlehnung an **228-1(Def)** werden hier die Aussagen $p \subset .x$, $x. \subset q$, $x. \subset .y$, $p \not\subset .x$, $x. \not\subset q$, $x. \not\subset .y$ auf E definiert.

362-4(Definition)

1) "$p \subset .x$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subset \mathsf{dom}\, x$ und
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \subset \beta).$$

2) "$x. \subset q$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subset \mathsf{dom}\, x$ und
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \subset q).$$

3) "$x. \subset .y$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subset (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$ und
$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \subset \gamma).$$

4) "$p \not\subset .x$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subset \mathsf{dom}\, x$ und
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \not\subset \beta).$$

5) "$x. \not\subset q$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subset \mathsf{dom}\, x$ und
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \not\subset q).$$

6) "$x. \not\subset .y$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subset (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,)$ und
$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \not\subset \gamma).$$

362-5. Im Kontext von **Suite V** interessiert der Zusammenhang von $p \subset .x$ etc. mit $p\_\mathsf{sub}.x$ etc. Dies soll hier untersucht werden.

362-5(Satz)

a) *"$p \subset .x$ auf E" genau dann, wenn "$p\_\mathsf{sub}.x$ auf E".*

b) *Aus "q Menge" und "$x. \subset q$ auf E" folgt "$x.\mathsf{sub}\_q$ auf E".*

c) *Aus "$x.\mathsf{sub}\_q$ auf E" folgt "$x. \subset q$ auf E".*

d) *"$x. \subset .y$ auf E" genau dann, wenn "$x.\mathsf{sub}.y$ auf E".*

e) *Aus "$p \not\subset .x$ auf E" folgt "$\neg(p\_\mathsf{sub}.x)$ auf E".*

f) *Aus "p Menge" und "$\neg(p\_\mathsf{sub}.x)$ auf E" folgt "$p \not\subset .x$ auf E".*

g) *Aus "$x. \not\subset q$ auf E" folgt "$\neg(x.\mathsf{sub}\_q)$ auf E".*

h) *Aus "q Menge" und "$\neg(x.\mathsf{sub}\_q)$ auf E" folgt "$x. \not\subset q$ auf E".*

i) *"$x. \not\subset .y$ auf E" genau dann, wenn "$\neg(x.\mathsf{sub}.y)$ auf E".*

Beweis **362-5**

---

sub-**Notation**.

---

a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $p \subset .x$ auf E.

1.1: Aus VS gleich "$p \subset .x$"
folgt via **362-4(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

> Thema1.2 $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.
>
> 2: Aus VS gleich "$p \subset .x$ auf E" und
> aus Thema1.2"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
> folgt via **362-4(Def)**: $p \subset \beta$.
>
> 3: Aus Thema1.2"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$"
> folgt via **folk**: β Menge.
>
> 4: Aus 2"$p \subset \beta$" und
> aus 3"β Menge"
> folgt via **74-10**: $p \,\mathsf{sub}\, \beta$.

Ergo Thema1.2: A1 | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \,\mathsf{sub}\, \beta)$"

2: Aus 1.1"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \,\mathsf{sub}\, \beta)$"
folgt via **361-19**: $p\_\mathsf{sub}.x$ auf E.

Beweis **362-5** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $p\,\mathsf{sub}.x$ auf E.

1.1: Aus VS gleich "$p\,\mathsf{sub}.x$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

Thema1.2 $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

2: Aus VS gleich "$p\,\mathsf{sub}.x$ auf E" und
aus Thema1.2 "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **361-19**: $p\ \mathsf{sub}\ \beta$.

3: Aus 2 "$p\ \mathsf{sub}\ \beta$"
folgt via **74-10**: $p \subset \beta$.

Ergo Thema1.2: A1 | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \subset \beta)$"

2: Aus 1.1 "$E \subseteq \mathsf{dom}\,x$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \subset \beta)$"
folgt via **362-4(Def)**: $p \subset .x$ auf E.

b) VS gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (x. \subset q$ auf $E)$.

1.1: Aus VS gleich "$x. \subset q$"
folgt via **362-4(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

Thema1.2 $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

2: Aus VS gleich "$\ldots x. \subset q$ auf E" und
aus Thema1.2 "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **362-4(Def)**: $\beta \subset q$.

3: Aus 2 "$\beta \subset q$" und
aus VS gleich "q Menge ..."
folgt via **74-10**: $\beta\ \mathsf{sub}\ q$.

Ergo Thema1.2: A1 | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta\ \mathsf{sub}\ q)$"

2: Aus 1.1 "$E \subseteq \mathsf{dom}\,x$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta\ \mathsf{sub}\ q)$"
folgt via **361-21**: $x.\mathsf{sub}\,q$ auf E.

<u>Beweis **362-5**</u> `c)` `VS` gleich $x.\mathsf{sub}\_q$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x.\mathsf{sub}\_q$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x.\mathsf{sub}\_q$ auf E" und
aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **361-21**: β sub q.

`3:` Aus 2"β sub q"
folgt via **74-10**: $\beta \subset q$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \subset q)$"

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \subset q)$"
folgt via **362-4(Def)**: $x. \subset q$ auf E.

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x. \subset .y$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x. \subset .y$"
folgt via **362-4(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

`Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x. \subset .y$ auf E" und
aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$"
folgt via **362-4(Def)**: $\beta \subset \gamma$.

`3:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in y$"
folgt via **folk**: γ Menge.

`4:` Aus 2"$\beta \subset \gamma$" und
aus 3"γ Menge"
folgt via **74-10**: β sub γ.

Ergo `Thema1.2`:
`A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta\ \mathsf{sub}\ \gamma)$"

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta\ \mathsf{sub}\ \gamma)$"
folgt via **361-23**: $x.\mathsf{sub}.y$ auf E.

Beweis **362-5** d) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $x.\mathsf{sub}.y$ auf E.

1.1: Aus VS gleich "$x.\mathsf{sub}.y$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,y)$.

Thema1.2 $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

2: Aus VS gleich "$x.\mathsf{sub}.y$ auf E" und
aus Thema1.2"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$"
folgt via **361-23**: $\beta\ \mathsf{sub}\ \gamma$.

3: Aus 2"$\beta\ \mathsf{sub}\ \gamma$"
folgt via **74-10**: $\beta \subset \gamma$.

Ergo Thema1.2:

A1 | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \subset \gamma)$"

2: Aus 1.1"$E \subseteq (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,y)$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \subset \gamma)$"
folgt via **362-4(Def)**: $x. \subset .y$ auf E.

e) VS gleich $p \not\subset .x$ auf E.

1.1: Aus VS gleich "$p \not\subset .x$"
folgt via **362-4(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

Thema1.2 $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

2: Aus VS gleich "$p \not\subset .x$ auf E" und
aus Thema1.2"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **362-4(Def)**: $p \not\subset \beta$.

3: Aus 2"$p \not\subset \beta$"
folgt via **74-11**: $\neg(p\ \mathsf{sub}\ \beta)$.

Ergo Thema1.2: A1 | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(p\ \mathsf{sub}\ \beta))$"

2: Aus 1.1"$E \subseteq \mathsf{dom}\,x$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(p\ \mathsf{sub}\ \beta))$"
folgt via **361-20**: $\neg(p\_\mathsf{sub}.x)$ auf E.

<u>Beweis **362-5**</u> `f)` `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (\neg(p\_\mathsf{sub}.x) \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\neg(p\_\mathsf{sub}.x)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(p\_\mathsf{sub}.x)$ auf E" und
aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **361-20**: $\neg(p \,\mathsf{sub}\, \beta)$.

`3:` Aus `2`"$\neg(p \,\mathsf{sub}\, \beta)$"
folgt via **74-11**: $(p \not\subseteq \beta) \vee (p \text{ Unmenge}) \vee (\beta \text{ Unmenge})$.

`4.1:` Aus `3` und
aus `VS` gleich "p Menge…"
folgt: $(p \not\subseteq \beta) \vee (\beta \text{ Unmenge})$.

`4.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$"
folgt via **folk**: β Menge.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $p \not\subseteq \beta$.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \not\subseteq \beta)\text{”}}$

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (p \not\subseteq \beta)$"
folgt via **362-4(Def)**: $p \not\subseteq .x$ auf E.

<u>Beweis **362-5**</u> `g)` `VS` gleich $x. \not\subseteq q$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x. \not\subseteq q$"
folgt via **362-4(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x. \not\subseteq q$ auf E" und
aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
folgt via **362-4(Def)**: $\beta \not\subseteq q$.

`3:` Aus `2`"$\beta \not\subseteq q$"
folgt via **74-11**: $\neg(\beta\ \mathsf{sub}\ q)$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(\beta\ \mathsf{sub}\ q))$"

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\neg(\beta\ \mathsf{sub}\ q))$"
folgt via **361-22**: $\neg(x.\mathsf{sub}\_q)$ auf E.

<u>Beweis **362-5**</u> `h)` `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.\mathsf{sub\_}q) \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{sub\_}q)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`Thema1.2`	$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.
`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(x.\mathsf{sub\_}q)$ auf E" und aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$" folgt via **361-22**:	$\neg(\beta\ \mathsf{sub}\ q)$.
`3:` Aus `2`"$\neg(\beta\ \mathsf{sub}\ q)$" folgt via **74-11**:	$(\beta \not\subseteq q) \vee (\beta \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.
`4.1:` Aus `3` und aus `VS` gleich "q Menge..." folgt:	$(\beta \not\subseteq q) \vee (\beta \text{ Unmenge})$.
`4.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$" folgt via **folk**:	β Menge.
`5:` Aus `4.1` und aus `4.2` folgt:	$\beta \not\subseteq q$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \not\subseteq q)$"

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \not\subseteq q)$"
folgt via **362-4(Def)**: $x. \not\subseteq q$ auf E.

Beweis **362-5** `i)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x.\not\subseteq .y$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x.\not\subseteq .y$"
folgt via **362-4(Def)**: $E\subseteq(\mathsf{dom}\,x)\cap(\mathsf{dom}\,y)$.

`Thema1.2` $(\alpha\in E)\wedge((\alpha,\beta)\in x)\wedge((\alpha,\gamma)\in y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x.\not\subseteq .y$ auf E" und
aus `Thema1.2`"$(\alpha\in E)\wedge((\alpha,\beta)\in x)\wedge((\alpha,\gamma)\in y)$"
folgt via **362-4(Def)**: $\beta\not\subseteq\gamma$.

`3:` Aus 2"$\beta\not\subseteq\gamma$"
folgt via **74-11**: $\neg(\beta\ \mathsf{sub}\ \gamma)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | "$\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha\in E)\wedge((\alpha,\beta)\in x)\wedge((\alpha,\gamma)\in y))\Rightarrow(\neg(\beta\ \mathsf{sub}\ \gamma))$"

`2:` Aus `1.1`"$E\subseteq(\mathsf{dom}\,x)\cap(\mathsf{dom}\,y)$" und
aus `A1` gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha\in E)\wedge((\alpha,\beta)\in x)\wedge((\alpha,\gamma)\in y))$
$\Rightarrow(\neg(\beta\ \mathsf{sub}\ \gamma))$"
folgt via **361-24**: $\neg(x.\mathsf{sub}.y)$ auf E.

<u>Beweis **362-5**</u> `i)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\neg(x.\mathsf{sub}.y)$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{sub}.y)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

`Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{sub}.y)$ auf E" und
aus `Thema1.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$"
folgt via **361-24**: $\neg(\beta\ \mathsf{sub}\ \gamma)$.

`3:` Aus 2"$\neg(\beta\ \mathsf{sub}\ \gamma)$"
folgt via **74-11**: $(\beta \not\subseteq \gamma) \vee (\beta$ Unmenge$) \vee (\gamma$ Unmenge$)$.

`4.1:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x \ldots$"
folgt via **folk**: β Menge.

`4.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in y$"
folgt via **folk**: γ Menge.

`5:` Aus `3`,
aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $\beta \not\subseteq \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \not\subseteq \gamma)$"

`2:` Aus `1.1`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \not\subseteq \gamma)$"
folgt via **362-4(Def)**: $x. \not\subseteq .y$ auf E.

$\square$

362-6. Via Negation folgt aus **362-5** Vorliegendes.

362-6(Satz)

a) *“$\neg(p \subset .x$ auf $E)$” genau dann, wenn “$\neg(p\_\mathsf{sub}.x$ auf $E)$”.*

b) *Aus “$\neg(x. \subset q$ auf $E)$” folgt “$\neg(x.\mathsf{sub}\_q$ auf $E)$”.*

c) *Aus “q Menge” und “$\neg(x.\mathsf{sub}\_q$ auf $E)$” folgt “$\neg(x. \subset q$ auf $E)$”.*

d) *“$\neg(x. \subset .y$ auf $E)$” genau dann, wenn “$\neg(x.\mathsf{sub}.y$ auf $E)$”.*

e) *Aus “p Menge” und “$\neg(p \not\subset .x$ auf $E)$” folgt “$\neg(\neg(p\_\mathsf{sub}.x)$ auf $E)$”.*

f) *Aus “$\neg(\neg(p\_\mathsf{sub}.x)$ auf $E)$” folgt “$\neg(p \not\subset .x$ auf $E)$”.*

g) *Aus “q Menge” und “$\neg(x. \not\subset q$ auf $E)$” folgt “$\neg(\neg(x.\mathsf{sub}\_q)$ auf $E)$”.*

h) *Aus “$\neg(\neg(x.\mathsf{sub}\_q)$ auf $E)$” folgt “$\neg(x. \not\subset q$ auf $E)$”.*

i) *“$\neg(x. \not\subset .y$ auf $E)$” genau dann, wenn “$\neg(\neg(x.\mathsf{sub}.y)$ auf $E)$”.*

Beweis **362-6** a)

1: Via **362-5** gilt: $(p \subset .x \text{ auf } E) \Leftrightarrow (p\_\mathsf{sub}.x \text{ auf } E)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(p \subset .x \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg(p\_\mathsf{sub}.x \text{ auf } E))$.

b)

1: Via **362-5** gilt: $(x.\mathsf{sub}\_q \text{ auf } E) \Rightarrow (x. \subset q \text{ auf } E)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x. \subset q \text{ auf } E)) \Rightarrow (\neg(x.\mathsf{sub}\_q \text{ auf } E))$.

c)

1: Via **362-5** gilt: $((q \text{ Menge}) \wedge (x. \subset q \text{ auf } E)) \Rightarrow (x.\mathsf{sub}\_q \text{ auf } E)$.

2: Aus 1
folgt: $((q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.\mathsf{sub}\_q \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(x. \subset q \text{ auf } E))$.

<u>Beweis **362-6**</u> `d)`

1: Via **362-5** gilt: $(x. \subset .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow (x.\mathsf{sub}.y \text{ auf } E)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x. \subset .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg(x.\mathsf{sub}.y \text{ auf } E))$.

`e)`

1: Via **362-5** gilt: $((p \text{ Menge}) \wedge (\neg(p\_\mathsf{sub}.x) \text{ auf } E)) \Rightarrow (p \not\subset .x \text{ auf } E)$.

2: Aus 1
folgt: $((p \text{ Menge}) \wedge (\neg(p \not\subset .x \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(\neg(p\_\mathsf{sub}.x) \text{ auf } E))$.

`f)`

1: Via **362-5** gilt $(p \not\subset .x \text{ auf } E) \Rightarrow (\neg(p\_\mathsf{sub}.x) \text{ auf } E)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(\neg(p\_\mathsf{sub}.x) \text{ auf } E)) \Rightarrow (\neg(p \not\subset .x \text{ auf } E))$.

`g)`

1: Via **362-5** gilt: $((q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.\mathsf{sub}\_q) \text{ auf } E)) \Rightarrow (x. \not\subset q \text{ auf } E)$.

2: Aus 1
folgt: $((q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x. \not\subset q \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(\neg(x.\mathsf{sub}\_q) \text{ auf } E))$.

`h)`

1: Via **362-5** gilt: $(x. \not\subset q \text{ auf } E) \Rightarrow (\neg(x.\mathsf{sub}\_q) \text{ auf } E)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(\neg(x.\mathsf{sub}\_q) \text{ auf } E)) \Rightarrow (\neg(x. \not\subset q \text{ auf } E))$.

`i)`

1: Via **362-5** gilt: $(x. \not\subset .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow (\neg(x.\mathsf{sub}.y) \text{ auf } E)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x. \not\subset .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg(\neg(x.\mathsf{sub}.y) \text{ auf } E))$.

$\square$

Mengenlehre: Einiges über x und $(x^{-1})^{-1}$.
Mengentheoretische Aspekte von (ir-)reflexiv, (anti-)Symmetrisch, transitiv.

Ersterstellung: 27/11/15 **Letzte Änderung: 09/12/15**

363-1. In Bezug auf "Relations-bezogene" Eigenschaften kann x durch $(x^{-1})^{-1}$ ersetzt werden.

363-1(Satz)

a) $(E \times D) \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = E \times D$.

b) $(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \cap (E \times D) = E \times D$.

c) $x^{-1} = x^{-1} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

d) $x \cap (E \times D) = (x^{-1})^{-1} \cap (E \times D)$.

e) $x \circ y = (x^{-1})^{-1} \circ y$.

f) $x \circ y = x \circ (y^{-1})^{-1}$.

Beweis **363-1** ab)

1: Via **6-12** gilt: $E \times D \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

2.a): Aus 1"$E \times D \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **folk**: $(E \times D) \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = E \times D$.

2.b): Aus 1"$E \times D \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **folk**: $(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \cap (E \times D) = E \times D$.

c)

1: Via **11-7** gilt: x^{-1} Relation.

2: Aus 1"x^{-1} Relation"
folgt via **10-3**: $x^{-1} = x^{-1} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

d)

$$x \cap (E \times D) \stackrel{\text{a)}}{=} x \cap ((E \times D) \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})) \stackrel{\mathbf{2-38}}{=} (E \times D) \cap ((\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \cap x)$$
$$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (E \times D) \cap (x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})) \stackrel{\mathbf{13-3}}{=} (E \times D) \cap (x^{-1})^{-1}$$
$$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (x^{-1})^{-1} \cap (E \times D).$$

Beweis **363-1** `e)`

`Thema0.1` $\alpha \in x \circ y.$

`1`: Aus `Thema0.1`"$\alpha \in x \circ y$"
folgt via **14-3**:
$$\exists \Omega, \Gamma, \Phi : ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge ((\Gamma, \Phi) \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)).$$

`2`: Aus `1`"$\ldots (\Gamma, \Phi) \in x \ldots$"
folgt via **11-4**: $(\Gamma, \Phi) \in (x^{-1})^{-1}.$

`3`: Aus `1`"$\ldots (\Omega, \Gamma) \in y \ldots$" und
aus `2`"$(\Gamma, \Phi) \in (x^{-1})^{-1}$"
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Phi) \in (x^{-1})^{-1} \circ y.$

`4`: Aus `1`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `3`
folgt: $\alpha \in (x^{-1})^{-1} \circ y.$

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \circ y) \Rightarrow (\alpha \in (x^{-1})^{-1} \circ y).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x \circ y \subseteq (x^{-1})^{-1} \circ y$"

...

<u>Beweis</u> **363-1** `e)` ...

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$ $\alpha \in (x^{-1})^{-1} \circ y$.

`1:` Aus `Thema0.1` "$\alpha \in (x^{-1})^{-1} \circ y$"
folgt via **14-3**:
$\exists \Omega, \Gamma, \Phi : ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge ((\Gamma, \Phi) \in (x^{-1})^{-1}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi))$.

`2:` Aus `1` "$\ldots (\Gamma, \Phi) \in (x^{-1})^{-1} \ldots$"
folgt via **11-4**: $(\Gamma, \Phi) \in x$.

`3:` Aus `1` "$\ldots (\Omega, \Gamma) \in y \ldots$" und
aus `2` "$(\Gamma, \Phi) \in x$"
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Phi) \in x \circ y$.

`4:` Aus `1` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `3`
folgt: $\alpha \in x \circ y$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x^{-1})^{-1} \circ y) \Rightarrow (\alpha \in x \circ y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$(x^{-1})^{-1} \circ y \subseteq x \circ y$"

`1:` Aus `A1` gleich "$x \circ y \subseteq (x^{-1})^{-1} \circ y$" und
aus `A2` gleich "$(x^{-1})^{-1} \circ y \subseteq x \circ y$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \circ y = (x^{-1})^{-1} \circ y$.

Beweis **363-1** `f)`

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha \in x \circ y.$

`1`: Aus `Thema0.1` "$\alpha \in x \circ y$"
folgt via **14-3**:
$$\exists \Omega, \Gamma, \Phi : ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge ((\Gamma, \Phi) \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)).$$

`2`: Aus `1` "$\ldots (\Omega, \Gamma) \in y \ldots$"
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Gamma) \in (y^{-1})^{-1}.$

`3`: Aus `2` "$(\Omega, \Gamma) \in (y^{-1})^{-1}$" und
aus `1` "$\ldots (\Gamma, \Phi) \in x \ldots$"
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Phi) \in x \circ (y^{-1})^{-1}.$

`4`: Aus `1` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `3`
folgt: $\alpha \in x \circ (y^{-1})^{-1}.$

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \circ y) \Rightarrow (\alpha \in \circ (y^{-1})^{-1}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“} x \circ y \subseteq x \circ (y^{-1})^{-1} \text{”}}$

...

<u>Beweis</u> **363-1** `f)` ...

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$ $\alpha \in x \circ (y^{-1})^{-1}$.

`1:` Aus `Thema0.1` "$\alpha \in x \circ (y^{-1})^{-1}$"
folgt via **14-3**:
$\exists \Omega, \Gamma, \Phi : ((\Omega, \Gamma) \in (y^{-1})^{-1}) \wedge ((\Gamma, \Phi) \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi))$.

`2:` Aus `1` "... $(\Omega, \Gamma) \in (y^{-1})^{-1}$ ..."
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Gamma) \in y$.

`3:` Aus `2` "$(\Omega, \Gamma) \in y$" und
aus `1` "... $(\Gamma, \Phi) \in x$ ..."
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Phi) \in x \circ y$.

`4:` Aus `1` "... $\alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `3`
folgt: $\alpha \in x \circ y$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \circ (y^{-1})^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in x \circ y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$x \circ (y^{-1})^{-1} \subseteq x \circ y$"

`1:` Aus `A1` gleich "$x \circ y \subseteq x \circ (y^{-1})^{-1}$" und
aus `A2` gleich "$x \circ (y^{-1})^{-1} \subseteq x \circ y$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \circ y = x \circ (y^{-1})^{-1}$.

$\square$

363-2. Die klassischen Relations-Attribute verändern sich beim Übergang von M zu $(M^{-1})^{-1}$ nicht.

363-2(Satz)

a) *“M reflexiv in z” genau dann, wenn “$(M^{-1})^{-1}$ reflexiv in z”.*

b) *“M reflexiv” genau dann, wenn “$(M^{-1})^{-1}$ reflexiv”.*

c) *“M irreflexiv in z” genau dann, wenn “$(M^{-1})^{-1}$ irreflexiv in z”.*

d) *“M irreflexi” genau dann, wenn “$(M^{-1})^{-1}$ irreflexiv”.*

e) *“M symmetrisch in z” genau dann, wenn “$(M^{-1})^{-1}$ symmetrisch in z”.*

f) *“M symmetrisch” genau dann, wenn “$(M^{-1})^{-1}$ symmetrisch”.*

g) *“M antiSymmetrisch in z” genau dann, wenn “$(M^{-1})^{-1}$ antiSymmetrisch in z”.*

h) *“M antiSymmetrisch” genau dann, wenn “$(M^{-1})^{-1}$ antiSymmetrisch”.*

i) *“M transitiv in z” genau dann, wenn “$(M^{-1})^{-1}$ transitiv in z”.*

j) *“M transitiv” genau dann, wenn “$(M^{-1})^{-1}$ transitiv”.*

Beweis **363-2** a)

$$(M \text{ reflexiv in } z) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ reflexiv in } z) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} ((M^{-1})^{-1} \text{ reflexiv in } z).$$

b)

$$(M \text{ reflexiv}) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ reflexiv}) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} ((M^{-1})^{-1} \text{ reflexiv}).$$

c)

$$(M \text{ irreflexiv in } z) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ irreflexiv in } z) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} ((M^{-1})^{-1} \text{ irreflexiv in } z).$$

d)

$$(M \text{ irreflexiv}) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ irreflexiv}) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} ((M^{-1})^{-1} \text{ irreflexiv}).$$

e)

$$(M \text{ symmetrisch in } z) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ symmetrisch in } z)$$
$$\overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} ((M^{-1})^{-1} \text{ symmetrisch in } z).$$

f)

$$(M \text{ symmetrisch}) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ symmetrisch}) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} ((M^{-1})^{-1} \text{ symmetrisch}).$$

g)

$$(M \text{ antiSymmetrisch in } z) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ antiSymmetrisch in } z)$$
$$\overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} ((M^{-1})^{-1} \text{ antiSymmetrisch in } z).$$

h)

$$(M \text{ antiSymmetrisch}) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ antiSymmetrisch})$$
$$\overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} ((M^{-1})^{-1} \text{ antiSymmetrisch}).$$

i)

$$(M \text{ transitiv in } z) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ transitiv in } z) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} ((M^{-1})^{-1} \text{ transitiv in } z).$$

j)

$$(M \text{ transitiv}) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} (M^{-1} \text{ transitiv}) \overset{\textbf{30-83}}{\Leftrightarrow} ((M^{-1})^{-1} \text{ transitiv}).$$

$\square$

363-3. Bereits in **#30** wird die Eigenschaft, (ir-)reflexiv zu sein mengentheoretisch umschreiben. Nun soll Symmetrie untersucht werden.

363-3(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` M *symmetrisch in* z.

`ii)` $M \cap (z \times z)$ *symmetrisch.*

`iii)` $M^{-1} \cap (z \times z) \subseteq M$.

Beweis **363-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich M symmetrisch in z.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha{}_{\_}M \cap (z \times z){}_{\_}\beta$.

`1:` Aus `Thema0`
folgt: $(\alpha, \beta) \in M \cap (z \times z)$.

`2:` Aus `1`"$(\alpha, \beta) \in M \cap (z \times z)$"
folgt via **folk**: $((\alpha, \beta) \in M) \wedge ((\alpha, \beta) \in z \times z)$.

`3.1:` Aus `2`"$(\alpha, \beta) \in M \ldots$"
folgt: $\alpha{}_{\_}M{}_{\_}\beta$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in z \times z$"
folgt via **folk**: $\alpha, \beta \in z$.

`4:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch in z",
aus `3.2`"$\alpha, \beta \in z$" und
aus `2`"$\alpha{}_{\_}M{}_{\_}\beta$"
folgt via **30-49(Def)**: $\beta{}_{\_}M{}_{\_}\alpha$.

`5.1:` Aus `4`
folgt: $(\beta, \alpha) \in M$.

`5.2:` Aus `3.2`"$\ldots \beta \in z$" und
aus `3.2`"$\alpha \ldots \in z$"
folgt via **folk**: $(\beta, \alpha) \in z \times z$.

`6:` Aus `5.1`"$(\beta, \alpha) \in M$" und
aus `5.2`"$(\beta, \alpha) \in z \times z$"
folgt via **folk**: $(\beta, \alpha) \in M \cap (z \times z)$.

`7:` Aus `6`
folgt: $\beta{}_{\_}M \cap (z \times z){}_{\_}\alpha$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha{}_{\_}M \cap (z \times z){}_{\_}\beta) \Rightarrow (\beta{}_{\_}M \cap (z \times z){}_{\_}\alpha)$.

Konsequenz via **292-1**: $M \cap (z \times z)$ symmetrisch.

Beweis **363-3** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $M \cap (z \times z)$ symmetrisch.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in M^{-1} \cap (z \times z)$.

`1`: Aus `Thema0`"$\alpha \in M^{-1} \cap (z \times z)$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in M^{-1}) \wedge (\alpha \in z \times z)$.

`2`: Aus `1`"$\ldots \alpha \in z \times z$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in z) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi))$.

`3`: Aus `1`"$\alpha \in M^{-1} \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$"
folgt: $(\Omega, \Phi) \in M^{-1}$.

`4`: Aus `3`"$(\Omega, \Phi) \in M^{-1}$"
folgt via **11-4**: $(\Phi, \Omega) \in M$.

`5`: Aus `2`"$\ldots \Phi \in z \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \Omega \ldots \in z \ldots$"
folgt via **folk**: $(\Phi, \Omega) \in z \times z$.

`6`: Aus `4`"$(\Phi, \Omega) \in M$" und
aus `5`"$(\Phi, \Omega) \in z \times z$"
folgt via **folk**: $(\Phi, \Omega) \in M \cap (z \times z)$.

`7`: Aus `6`
folgt: $\Phi\_M \cap (z \times z)\_\Omega$.

`8`: Aus `VS` gleich "$M \cap (z \times z)$ symmetrisch" und
aus `7`"$\Phi\_M \cap (z \times z)\_\Omega$"
folgt via **292-1**: $\Omega\_M \cap (z \times z)\_\Phi$.

`9`: Aus `8`
folgt: $(\Omega, \Phi) \in M \cap (z \times z)$.

`10`: Aus `9`
folgt via **folk**: $(\Omega, \Phi) \in M$.

`11`: Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `10`
folgt: $\alpha \in M$.

...

<u>Beweis **363-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $M \cap (z \times z)$ symmetrisch.

...

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in M^{-1} \cap (z \times z)) \Rightarrow (\alpha \in M).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $M^{-1} \cap (z \times z) \subseteq M.$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $M^{-1} \cap (z \times z) \subseteq M.$

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $(\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha \_M\_ \beta).$

`1.1:` Aus `Thema0`“$\ldots \alpha \_M\_ \beta$”
folgt: $(\alpha, \beta) \in M.$

`1.2:` Aus `Thema0`“$\ldots \beta \in z \ldots$” und
aus `Thema0`“$\alpha \ldots \in z \ldots$”
folgt via **folk**: $(\beta, \alpha) \in z \times z.$

`2:` Aus `1.1`“$(\alpha, \beta) \in M$”
folgt via **11-4**: $(\beta, \alpha) \in M^{-1}.$

`3:` Aus `2`“$(\beta, \alpha) \in M^{-1}$” und
aus `1.2`“$(\beta, \alpha) \in z \times z$”
folgt via **folk**: $(\beta, \alpha) \in M^{-1} \cap (z \times z).$

`4:` Aus `3`“$(\beta, \alpha) \in M^{-1} \cap (z \times z)$” und
aus `VS` gleich “$M^{-1} \cap (z \times z) \subseteq M$”
folgt via **folk**: $(\beta, \alpha) \in M.$

`5:` Aus `4`
folgt: $\beta \_M\_ \alpha.$

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha \_M\_ \beta)) \Rightarrow (\beta \_M\_ \alpha).$

Konsequenz via **30-49(Def)**: M symmetrisch in z.

□

363-4. Aus **363-3** ergibt sich im Fall $z = \mathcal{U}$ eine ansprechende Kurzform.

363-4(Satz)

"M symmetrisch" genau dann, wenn "$M^{-1} \subseteq M$".

Beweis **363-4** $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich M symmetrisch.

`1:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch"
folgt via **30-49(Def)**: M symmetrisch in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1` "M symmetrisch in $\mathcal{U}$"
folgt via **363-3**: $M^{-1} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq M$.

`3:` Via **363-1** gilt: $M^{-1} = M^{-1} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $M^{-1} \subseteq M$.

$\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $M^{-1} \subseteq M$.

`1:` Via **363-1** gilt: $M^{-1} = M^{-1} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $M^{-1} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq M$.

`3:` Aus `2` "$M^{-1} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq M$"
folgt via **363-3**: M symmetrisch in $\mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` "M symmetrisch in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-49(Def)**: M symmetrisch.

□

363-5. Auch für die AntiSymmetrie ist eine rein mengentheoretische Beschreibung möglich.

363-5(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *M antiSymmetrisch in z.*

`ii)` $M \cap (z \times z)$ *antiSymmetrisch.*

`iii)` $(M \cap M^{-1}) \cap (z \times z) \subseteq \mathsf{id}$.

Beweis **363-5** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich M antiSymmetrisch in z.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $(\alpha\_M \cap (z \times z)\_\beta) \wedge (\beta\_M \cap (z \times z)\_\alpha)$.

`1.1:` Aus `Thema0`"$\alpha\_M \cap (z \times z)\_\beta \ldots$"
folgt: $(\alpha, \beta) \in M \cap (z \times z)$.

`1.2:` Aus `Thema0`"$\ldots \beta\_M \cap (z \times z)\_\alpha$"
folgt: $(\beta, \alpha) \in M \cap (z \times z)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$(\alpha, \beta) \in M \cap (z \times z)$"
folgt via **folk**: $((\alpha, \beta) \in M) \wedge ((\alpha, \beta) \in z \times z)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$(\beta, \alpha) \in M \cap (z \times z)$"
folgt via **folk**: $(\beta, \alpha) \in M$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\ldots (\alpha, \beta) \in z \times z$"
folgt via **folk**: $\alpha, \beta \in z$.

`3.2:` Aus `2.1`"$(\alpha, \beta) \in M \ldots$"
folgt: α_M_β.

`3.3:` Aus `2.2`
folgt: β_M_α.

`4:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch in z",
aus `3.1`"$\alpha, \beta \in z$",
aus `3.2`"α_M_β" und
aus `3.2`"β_M_α"
folgt via **30-45(Def)**: $\alpha = \beta$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha\_M \cap (z \times z)\_\beta) \wedge (\beta\_M \cap (z \times z)\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha = \beta)$.

Konsequenz via **292-1**: $M \cap (z \times z)$ antiSymmetrisch.

Beweis **363-5** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $M \cap (z \times z)$ antiSymmetrisch.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in (M \cap M^{-1}) \cap (z \times z)$.

`1:` Aus `Thema0`“$\alpha \in (M \cap M^{-1}) \cap (z \times z)$”
folgt via **folk**: $(\alpha \in M \cap M^{-1}) \wedge (\alpha \in z \times z)$.

`2:` Aus `1`“$\ldots \alpha \in z \times z$”
folgt via **folk**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in z) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi))$.

`3.1:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$” und
aus `1`“$\ldots \alpha \in M \cap M^{-1} \ldots$”
folgt: $(\Omega, \Phi) \in M \cap M^{-1}$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$” und
aus `1`“$\ldots \alpha \in z \times z$”
folgt: $(\Omega, \Phi) \in z \times z$.

`3.3:` Aus `2`“$\ldots \Phi \in z \ldots$” und
aus `2`“$\ldots \Omega \ldots \in z \ldots$”
folgt via **folk**: $(\Phi, \Omega) \in z \times z$.

`4:` Aus `3`“$(\Omega, \Phi) \in M \cap M^{-1}$”
folgt via **folk**: $((\Omega, \Phi) \in M) \wedge ((\Omega, \Phi) \in M^{-1})$.

`5.1:` Aus `4`“$(\Omega, \Phi) \in M \ldots$” und
aus `3.2`“$(\Omega, \Phi) \in z \times z$”
folgt: $(\Omega, \Phi) \in M \cap (z \times z)$.

`5.2:` Aus `4`“$\ldots (\Omega, \Phi) \in M^{-1}$”
folgt via **11-4**: $(\Phi, \Omega) \in M$.

`6.1:` Aus `5.1`
folgt: $\Omega \_ M \cap (z \times z) \_ \Phi$.

`6.2:` Aus `5.2`“$(\Phi, \Omega) \in M$” und
aus `3.3`“$(\Phi, \Omega) \in z \times z$”
folgt via **folk**: $(\Phi, \Omega) \in M \cap (z \times z)$.

`7:` Aus `6.2`
folgt: $\Phi \_ M \cap (z \times z) \_ \Omega$.

...

...

Beweis **363-5** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $M \cap (z \times z)$ antiSymmetrisch.

...

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in (M \cap M^{-1}) \cap (z \times z)$.

...

`8:` Aus `VS` gleich "$M \cap (z \times z)$ antiSymmetrisch",
aus `6.1`"$\Omega\_M \cap (z \times z)\_\Phi$" und
aus `7`"$\Phi\_M \cap (z \times z)\_\Omega$"
folgt via **292-1**: $\Omega = \Phi$.

`9:` Aus `2`"$\ldots\Omega\ldots \in z \ldots$"
folgt via **332-1**: $\Omega \in \mathcal{U}$.

`10:` Aus `8`"$\Omega = \Phi$" und
aus `9`"$\Omega \in \mathcal{U}$"
folgt via **20-10**: $(\Omega, \Phi) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

`11:` Aus `2`"$\ldots\alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `10`
folgt: $\alpha \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

`12:` Aus `11` und
aus **20-7(Def)**"$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{id}$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in (M \cap M^{-1}) \cap (z \times z)) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{id})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(M \cap M^{-1}) \cap (z \times z) \subseteq \mathsf{id}$.

<u>Beweis **363-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(M \cap M^{-1}) \cap (z \times z) \subseteq \mathsf{id}$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $(\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha)$.

1.1: Aus Thema0"$\alpha, \beta \in z \ldots$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \in z \times z$.

1.2: Aus Thema0"$\ldots \alpha\_M\_\beta \ldots$"
folgt: $(\alpha, \beta) \in M$.

1.3: aus Thema0"$\ldots \beta\_M\_\alpha$"
folgt: $(\beta, \alpha) \in M$.

2: Aus 1.3"$(\beta, \alpha) \in M$"
folgt via **11-4**: $(\alpha, \beta) \in M^{-1}$.

3: Aus 1.2"$(\alpha, \beta) \in M$" und
aus 2"$(\alpha, \beta) \in M^{-1}$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \in M \cap M^{-1}$.

4: Aus 3"$(\alpha, \beta) \in M \cap M^{-1}$" und
aus 1.1"$(\alpha, \beta) \in z \times z$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \in (M \cap M^{-1}) \cap (z \times z)$.

5: Aus 4"$(\alpha, \beta) \in (M \cap M^{-1}) \cap (z \times z)$" und
aus VS gleich "$(M \cap M^{-1}) \cap (z \times z) \subseteq \mathsf{id}$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \in \mathsf{id}$.

6: Aus 5"$(\alpha, \beta) \in \mathsf{id}$" und
aus **20-4(Def)**"$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $(\alpha, \beta) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

7: Aus 6"$(\alpha, \beta) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt via **20-10**: $\alpha = \beta$.

Ergo Thema0: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha = \beta)$.

Konsequenz via **30-45(Def)**: M antiSymmetrisch in z.

□

363-6. Aus **363-5** folgt Erwartetes für die AntiSymmetrie.

363-6(Satz)

"M antiSymmetrisch" genau dann, wenn "$M \cap M^{-1} \subseteq \mathsf{id}$".

Beweis **363-6** $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich M antiSymmetrisch.

1: Aus VS gleich "M antiSymmetrisch"
folgt via **30-45(Def)**: M antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$.

2: Aus 1 "M antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$"
folgt via **363-5**: $(M \cap M^{-1}) \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq \mathsf{id}$.

3: $M \cap M^{-1} \stackrel{\mathbf{363-1}}{=} M \cap (M^{-1} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})) \stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} (M \cap M^{-1}) \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

4: Aus 3 "$M \cap M^{-1} = \ldots = (M \cap M^{-1}) \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$" und
aus 2
folgt: $M \cap M^{-1} \subseteq \mathsf{id}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $M \cap M^{-1} \subseteq \mathsf{id}$.

1: $(M \cap M^{-1}) \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} M \cap (M^{-1} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})) \stackrel{\mathbf{363-1}}{=} M \cap M^{-1}$.

2: Aus 1 "$(M \cap M^{-1}) \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = \ldots = M \cap M^{-1}$" und
aus VS
folgt: $(M \cap M^{-1}) \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq \mathsf{id}$.

3: Aus 2 "$(M \cap M^{-1}) \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq \mathsf{id}$"
folgt via **363-5**: M antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$.

4: Aus 3 "M antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-45(Def)**: M antiSymmetrisch.

$\square$

363-7. Auch für Transitivität gibt es eine mengentheoretische Umschreibung.

363-7(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *M transitiv in z.*

`ii)` *$M \cap (z \times z)$ transitiv.*

`iii)` $(M \cap (z \times z)) \circ (M \cap (z \times z)) \subseteq M$.

Beweis **363-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich M transitiv in z.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $(\alpha\_M \cap (z \times z)\_\beta) \wedge (\beta\_M \cap (z \times z)\_\gamma)$.

1: Aus Thema0
folgt: $(\alpha, \beta), (\beta, \gamma) \in M \cap (z \times z)$.

2.1: Aus 1"$(\alpha, \beta) \ldots \in M \cap (z \times z)$"
folgt via **folk**: $((\alpha, \beta) \in M) \wedge ((\alpha, \beta) \in z \times z)$.

2.2: Aus 1"$\ldots (\beta, \gamma) \in M \cap (z \times z)$"
folgt via **folk**: $((\beta, \gamma) \in M) \wedge ((\beta, \gamma) \in z \times z)$.

3.1: Aus 2.1"$(\alpha, \beta) \in M \ldots$"
folgt: α_M_β.

3.2: Aus 2.2"$(\beta, \gamma) \in M \ldots$"
folgt: β_M_γ.

3.3: Aus 2.1"$\ldots (\alpha, \beta) \in z \times z$"
folgt via **folk**: $\alpha, \beta \in z$.

3.4: Aus 2.2"$\ldots (\beta, \gamma) \in z \times z$"
folgt via **folk**: $\beta, \gamma \in z$.

4: Aus VS gleich "M transitiv in z",
aus 3.2"$\alpha, \beta \in z$",
aus 3.4"$\ldots \gamma \in z$",
aus 3.1"α_M_β" und
aus 3.2"β_M_γ"
folgt via **30-30(Def)**: α_M_γ.

5.1: Aus 4
folgt: $(\alpha, \gamma) \in M$.

5.2: Aus 3.3"$\alpha \ldots \in z$" und
aus 3.4"$\ldots \gamma \in z$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \gamma) \in z \times z$.

6: Aus 5.1"$(\alpha, \gamma) \in M$" und
aus 5.2"$(\alpha, \gamma) \in z \times z$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \gamma) \in M \cap (z \times z)$.

...

...

<u>Beweis **363-7**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich M transitiv in z.

...

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $(\alpha\_M \cap (z \times z)\_\beta) \wedge (\beta\_M \cap (z \times z)\_\gamma)$.

...

`7:` Aus `6`
folgt: $\alpha\_M \cap (z \times z)\_\gamma$.

Ergo `Thema0`:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha\_M \cap (z \times z)\_\beta) \wedge (\beta\_M \cap (z \times z)\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M \cap (z \times z)\_\gamma).$$

Konsequenz via **292-1**: $M \cap (z \times z)$ transitiv.

Beweis **363-7** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $M \cap (z \times z)$ transitiv.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in (M \cap (z \times z)) \circ (M \cap (z \times z))$.

`1:` Aus `Thema0` "$\alpha \in (M \cap (z \times z)) \circ (M \cap (z \times z))$"
folgt via **14-3**:
$\exists \Omega, \Gamma, \Phi : ((\Omega, \Gamma), (\Gamma, \Phi) \in M \cap (z \times z)) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi))$.

`2.1:` Aus `1` "$\ldots (\Omega, \Gamma) \ldots \in M \cap (z \times z) \ldots$"
folgt: $\Omega \_ M \cap (z \times z) \_ \Gamma$.

`2.2:` Aus `1` "$\ldots (\Gamma, \Phi) \in M \cap (z \times z) \ldots$"
folgt: $\Gamma \_ M \cap (z \times z) \_ \Phi$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M \cap (z \times z)$ transitiv",
aus `2.1` "$\Omega \_ M \cap (z \times z) \_ \Gamma$" und
aus `2.2` "$\Gamma \_ M \cap (z \times z) \_ \Phi$"
folgt via **292-1**: $\Omega \_ M \cap (z \times z) \_ \Phi$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\Omega, \Phi) \in M \cap (z \times z)$.

`5:` Aus `4`
folgt via **folk**: $(\Omega, \Phi) \in M$.

`6:` Aus `1` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `5`
folgt: $\alpha \in M$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in (M \cap (z \times z)) \circ (M \cap (z \times z))) \Rightarrow (\alpha \in M)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(M \cap (z \times z)) \circ (M \cap (z \times z)) \subseteq M$.

Beweis **363-7** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(M \cap (z \times z)) \circ (M \cap (z \times z)) \subseteq M.$

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma).$

`1.1:` Aus `Thema0`"$\alpha, \beta \ldots \in z \ldots$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \in z \times z.$

`1.2:` Aus `Thema0`"$\ldots \beta, \gamma \in z \ldots$"
folgt via **folk**: $(\beta, \gamma) \in z \times z.$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \alpha\_M\_\beta \ldots$"
folgt: $(\alpha, \beta) \in M.$

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots \beta\_M\_\gamma$"
folgt: $(\beta, \gamma) \in M.$

`2.1:` Aus `1.3`"$(\alpha, \beta) \in M$" und
aus `1.1`"$(\alpha, \beta) \in z \times z$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \in M \cap (z \times z).$

`2.2:` Aus `1.4`"$(\beta, \gamma) \in M$" und
aus `1.2`"$(\beta, \gamma) \in z \times z$"
folgt via **folk**: $(\beta, \gamma) \in M \cap (z \times z).$

`3:` Aus `2.1`"$(\alpha, \beta) \in M \cap (z \times z)$" und
aus `2.2`"$(\beta, \gamma) \in M \cap (z \times z)$"
folgt via **14-5**: $(\alpha, \gamma) \in (M \cap (z \times z)) \circ (M \cap (z \times z)).$

`4:` Aus `3`"$(\alpha, \gamma) \in (M \cap (z \times z)) \circ (M \cap (z \times z))$" und
aus `VS` gleich "$(M \cap (z \times z)) \circ (M \cap (z \times z)) \subseteq M$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \gamma) \in M.$

`5:` Aus `4`
folgt: $\alpha\_M\_\gamma.$

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta, \gamma \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\gamma).$

Konsequenz via **30-30(Def)**: M transitiv in z.

$\square$

363-8. M ist tatsächlich genau dann transitiv, wenn $M \circ M \subseteq M$ gilt.

363-8(Satz)

"M transitiv" genau dann, wenn "$M \circ M \subseteq M$".

<u>Beweis **363-8**</u> $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich M transitiv.

`1:` Aus `VS` gleich “M transitiv”
folgt via **30-30(Def)**: M transitiv in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`“M transitiv in $\mathcal{U}$”
folgt via **363-8**: $(M \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})) \circ (M \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})) \subseteq M$.

`3:` $(M \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})) \circ (M \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})) \stackrel{\mathbf{13-3}}{=} (M^{-1})^{-1} \circ (M^{-1})^{-1} \stackrel{\mathbf{259-4}}{=} M \circ M$.

`4:` Aus `3`“$(M \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})) \circ (M \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})) = \ldots = M \circ M$” und
aus `2`
folgt: $M \circ M \subseteq M$.

$\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $M \circ M \subseteq M$.

> `Thema0` $(\alpha \_ M \_ \beta) \wedge (\beta \_ M \_ \gamma)$.
>
> `1.1:` Aus `Thema0`“$\alpha \_ M \_ \beta \ldots$”
> folgt: $(\alpha, \beta) \in M$.
>
> `1.2:` Aus `Thema0`“$\ldots \beta \_ M \_ \gamma$”
> folgt: $(\beta, \gamma) \in M$.
>
> `2:` Aus `1.1`“$(\alpha, \beta) \in M$” und
> aus `1.2`“$(\beta, \gamma) \in M$”
> folgt via **14-5**: $(\alpha, \gamma) \in M \circ M$.
>
> `3:` Aus `2`“$(\alpha, \gamma) \in M \circ M$” und
> aus `VS` gleich “$M \circ M \subseteq M$”
> folgt via **folk**: $(\alpha, \gamma) \in M$.
>
> `4:` Aus `3`
> folgt: $\alpha \_ M \_ \gamma$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \_ M \_ \beta) \wedge (\beta \_ M \_ \gamma)) \Rightarrow (\alpha \_ M \_ \gamma)$.

Konsequenz via **292-1**: M transitiv.

$\square$

363-9. Auch für $x \circ y$ gelten Inklusions-Aussagen. Die Beweis-Reihenfolge ist `cab)`.

363-9(Satz)

`a)` *Aus* "$x \subseteq z$" *folgt* "$x \circ y \subseteq z \circ y$".

`b)` *Aus* "$y \subseteq w$" *folgt* "$x \circ y \subseteq x \circ w$".

`c)` *Aus* "$x \subseteq z$" *und* "$y \subseteq w$" *folgt* "$x \circ y \subseteq z \circ w$".

Beweis **363-9** `c)` `VS` gleich $(x \subseteq z) \wedge (y \subseteq w)$.

`Thema0` $\alpha \in x \circ y$.

`1:` Aus `Thema0` "$\alpha \in x \circ y$"
folgt via **14-3**:
$$\exists \Omega, \Gamma, \Phi : ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge ((\Gamma, \Phi) \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)).$$

`2.1:` Aus `1` "$\ldots (\Gamma, \Phi) \in x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq z \ldots$"
folgt via **folk**: $(\Gamma, \Phi) \in z$.

`2.2:` Aus `1` "$\ldots (\Omega, \Gamma) \in y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \subseteq w$"
folgt via **folk**: $(\Omega, \Gamma) \in w$.

`3:` Aus `2.2` "$(\Omega, \Gamma) \in w$" und
aus `2.1` "$(\Gamma, \Phi) \in z$"
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Phi) \in z \circ w$.

`4:` Aus `1` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `3`
folgt: $\alpha \in z \circ w$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \circ y) \Rightarrow (\alpha \in z \circ w)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \circ y \subseteq z \circ w$.

<u>Beweis</u> **363-9** `a)` `VS` gleich $x \subseteq z$.

`1:` Via **folk** gilt: $y \subseteq y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq z$" und
aus `1`"$y \subseteq y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \circ y \subseteq z \circ y$.

`b)` `VS` gleich $y \subseteq w$.

`1:` Via **folk** gilt: $x \subseteq x$.

`2:` Aus `1`"$x \subseteq x$" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq w$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \circ y \subseteq x \circ w$.

□

363-10. Nachträglich sollen noch **30-18,21** verschärft werden.

<u>363-10(Satz)</u>

a) *"M reflexiv in z" genau dann, wenn "$\mathsf{id}_z \subseteq M$".*

b) *"M reflexiv" genau dann, wenn "$\mathsf{id} \subseteq M$".*

<u>Beweis **363-10**</u> `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich M reflexiv in z.

Aus `VS` gleich “M reflexiv in z”
folgt via **30-18**: $\mathsf{id}_z \subseteq M$.

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{id}_z \subseteq M$.

`Thema0` $\alpha \in z$.

`1:` Aus `Thema0`“$\alpha \in z$”
folgt via **20-9**: $(\alpha, \alpha) \in \mathsf{id}_z$.

`2:` Aus `1`“$(\alpha, \alpha) \in \mathsf{id}_z$” und
aus `VS` gleich “$\mathsf{id}_z \subseteq M$”
folgt via **folk**: $(\alpha, \alpha) \in M$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\alpha \_ M \_ \alpha$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha \_ M \_ \alpha)$.

Konsequenz via **30-17(Def)**: M reflexiv in z.

`b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich M reflexiv.

Aus `VS` gleich “M reflexiv”
folgt via **30-21**: $\mathsf{id} \subseteq M$.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{id} \subseteq M$.

`1:` Aus **20-7(Def)**“$\mathsf{id}_{\mathcal{U}} = \mathsf{id}$” und
aus `VS`
folgt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}} \subseteq M$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{id}_{\mathcal{U}} \subseteq M$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: M reflexiv in $\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`“M reflexiv in $\mathcal{U}$”
folgt via **30-17(Def)**: M reflexiv.

□

Mengenlehre: Weiteres über $\mathsf{paar}(x, y)$.
$p = .x$ auf E genau dann, wenn $p\_\mathsf{id}.x$ auf E.
$x. = .y$ auf E genau dann, wenn $x.\mathsf{id}.y$ auf E.

Ersterstellung: 09/12/15 **Letzte Änderung: 10/12/15**

364-1. Auch $\mathsf{paar}(x, y)[E]$ ist eine Relation.

364-1(Satz)

a) $\mathsf{paar}(x, y)[E]$ *Relation.*

b) $(\mathsf{paar}(x, y)[E])^{-1} \subseteq \mathsf{paar}(y, x)[E]$.

c) $(\mathsf{paar}(x, y)[E])^{-1} = \mathsf{paar}(y, x)[E]$.

Beweis **364-1** a)

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in \mathsf{paar}(x, y)[E]$.

Aus `Thema0`"$\alpha \in \mathsf{paar}(x, y)[E]$"
folgt via **361-10**: $\exists \Phi, \Psi : \alpha = (\Phi, \Psi)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{paar}(x, y)[E]) \Rightarrow (\exists \Phi, \Psi : \alpha = (\Phi, \Psi))$.

Konsequenz via **folk**: $\mathsf{paar}(x, y)[E]$ Relation.

<u>Beweis</u> **364-1** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in (\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1}$.

`1:` Aus `Thema0`“$\alpha \in (\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1}$”
folgt via **11-3**:
$\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Omega, \Psi)) \wedge ((\Psi, \Omega) \in \mathsf{paar}(x,y)[E])$.

`2:` Aus `1`“$\ldots (\Psi, \Omega) \in \mathsf{paar}(x,y)[E]$”
folgt via **361-10**:
$\exists \Gamma : (\Gamma \in E) \wedge ((\Gamma, \Psi) \in x) \wedge ((\Gamma, \Omega) \in y)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Gamma \in E \ldots$”,
aus `2`“$\ldots (\Gamma, \Omega) \in y$” und
aus `2`“$\ldots (\Gamma, \Psi) \in x \ldots$”
folgt via **361-10**: $(\Omega, \Psi) \in \mathsf{paar}(y,x)[E]$.

`4:` Aus `1`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi) \ldots$” und
aus `3`
folgt: $\alpha \in \mathsf{paar}(y,x)[E]$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{paar}(y,x)[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1} \subseteq \mathsf{paar}(y,x)[E]$.

`c)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1} \subseteq \mathsf{paar}(y,x)[E]$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(\mathsf{paar}(y,x)[E])^{-1} \subseteq \mathsf{paar}(x,y)[E]$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{paar}(y,x)[E]$ Relation.

`2.1:` Aus `1.2`“$(\mathsf{paar}(y,x)[E])^{-1} \subseteq \mathsf{paar}(x,y)[E]$”
folgt via **11-6**: $((\mathsf{paar}(y,x)[E])^{-1})^{-1} \subseteq (\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1}$.

`2.2:` Aus `1.3`“$\mathsf{paar}(y,x)[E]$ Relation”
folgt via **13-3**: $((\mathsf{paar}(y,x)[E])^{-1})^{-1} = \mathsf{paar}(y,x)[E]$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\mathsf{paar}(y,x)[E] \subseteq (\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1}$.

`4:` Aus `1.1`“$(\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1} \subseteq \mathsf{paar}(y,x)[E]$” und
aus `3`“$\mathsf{paar}(y,x)[E] \subseteq (\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1} = \mathsf{paar}(y,x)[E]$.

$\square$

364-2. Für symmetrische M gelten erwartete Konsequenzen aus $p\_M.x$, $x.M.y$ auf E. Auf eine "Lokalisierung von M auf $E\times E$" wird bis auf Weiteres verzichtet. Die Beweis-Reihenfolge ist `cab)`.

364-2(Satz)

a) *Aus "M symmetrisch" und "$p\_M.x$ auf E" folgt "$x.M\_p$ auf E".*

b) *Aus "M symmetrisch" und "$x.M\_q$ auf E" folgt "$q\_M.x$ auf E".*

c) *Aus "M symmetrisch" und "$x.M.y$ auf E" folgt "$y.M.x$ auf E".*

Beweis **364-2** `c)` `VS` gleich $(M \text{ symmetrisch}) \wedge (x.M.y \text{ auf } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x.M.y$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $(E \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)) \wedge (\mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq M)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \mathsf{paar}(x,y)[E] \subseteq M$"
folgt via **11-6**: $(\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1} \subseteq M^{-1}$.

`3.1:` Via **364-1** gilt: $(\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1} = \mathsf{paar}(y,x)[E]$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch$\ldots$"
folgt via **363-4**: $M^{-1} \subseteq M$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `2`
folgt: $\mathsf{paar}(y,x)[E] \subseteq M^{-1}$.

`5:` Aus `4`"$\mathsf{paar}(y,x)[E] \subseteq M^{-1}$" und
aus `3.2`"$M^{-1} \subseteq M$"
folgt via **folk**: $\mathsf{paar}(y,x)[E] \subseteq M$.

`6:` Aus `1`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \ldots$" und
aus `5`"$\mathsf{paar}(y,x)[E] \subseteq M$"
folgt via **361-12(Def)**: $y.M.x$ auf E.

Beweis **364-2** `a)` `VS` gleich $(M \text{ symmetrisch}) \wedge (p\_M.x \text{ auf } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_M.x$ auf E"
folgt via **361-14**: $(p^{\mathbf{on}}E).M.x$ auf E.

`2:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch…" und
aus `1`"$(p^{\mathbf{on}}E).M.x$ auf E"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x.M.(p^{\mathbf{on}}E)$ auf E.

`3:` Aus `2`"$x.M.(p^{\mathbf{on}}E)$ auf E"
folgt via **361-14**: $x.M\_p$ auf E.

`b)` `VS` gleich $(M \text{ symmetrisch}) \wedge (x.M\_q \text{ auf } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x.M\_q$ auf E"
folgt via **361-14**: $x.M.(q^{\mathbf{on}}E)$ auf E.

`2:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch…" und
aus `1`"$x.M.(q^{\mathbf{on}}E)$ auf E"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(q^{\mathbf{on}}E).M.x$ auf E.

`3:` Aus `2`"$(q^{\mathbf{on}}E).M.x$ auf E"
folgt via **361-14**: $q\_M.x$ auf E.

$\square$

364-3. Ist M symmetrisch (in z), so ist auch $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ symmetrisch (in z).

<u>**364-3(Satz)**</u>

a) *Aus "M symmetrisch in z" und "$p, q \in z$" und "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$"
folgt "$q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$".*

b) *Aus "M symmetrisch in z" folgt "$\overset{\mathbf{ir}}{M}$ symmetrisch in z".*

c) *Aus "M symmetrisch" und "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$" folgt "$q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$".*

d) *Aus "M symmetrisch" folgt "$\overset{\mathbf{ir}}{M}$ symmetrisch".*

<u>Beweis **364-3**</u> `a)` `VS` gleich $(M \text{ symmetrisch in } z) \wedge (p, q \in z) \wedge (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$"
folgt via **41-3**: $(p\_M\_q) \wedge (p \neq q)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$(M \text{ symmetrisch in } z) \wedge (p, q \in z) \ldots$" und
aus `1`"$p\_M\_q \ldots$"
folgt via **30-49(Def)**: q_M_p.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots p \neq q$"
folgt: $q \neq p$.

`3:` Aus `2.1`"q_M_p" und
aus `2.2`"$q \neq p$"
folgt via **41-3**: $q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$.

Beweis **364-3** `b)` `VS` gleich M symmetrisch in z.

> `Thema0` $(\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-\beta)$.
>
> Aus `VS` gleich "M symmetrisch in $z \ldots$" und
> aus `Thema0` "$(\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-\beta)$"
> folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\beta_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-\alpha$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-\beta)) \Rightarrow (\beta_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-\alpha)$.

Konsequenz via **30-49(Def)**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ symmetrisch in z.

`c)` `VS` gleich (M symmetrisch) $\wedge$ $(p_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-q)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch..." folgt via **30-49(Def)**: M symmetrisch in $\mathcal{U}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-q$" folgt via **folk**: p, q Menge.

`2:` Aus `1.2` "p, q Menge" folgt via **folk**: $p, q \in \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1.1` "M symmetrisch in $\mathcal{U}$", aus `2` "$p, q \in \mathcal{U}$" und aus `VS` gleich "$\ldots p_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-q$" folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $q_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-p$.

`d)` `VS` gleich M symmetrisch.

`1:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch" folgt via **30-49(Def)**: M symmetrisch in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1` "M symmetrisch in $\mathcal{U}$" folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ symmetrisch in $\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2` "$\overset{\mathbf{ir}}{M}$ symmetrisch in $\mathcal{U}$" folgt via **30-49(Def)**: $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ symmetrisch.

□

364-4. Ist M symmetrisch, so gelten bemerkenswerte Aussagen über die korrespondierenden Intervalle.

<u>**364-4(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) *M symmetrisch.*

Dann folgt:

a) $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

b) $]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} p[$.

c) $\langle\cdot \overset{M}{|} q] \subseteq [q \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

d) $\langle\cdot \overset{M}{|} q[\subseteq]q \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

e) $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle = \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

f) $]p \overset{M}{|} \cdot\rangle = \langle\cdot \overset{M}{|} p[$.

g) $[p \overset{M}{|} q] = [q \overset{M}{|} p]$.

h) $]p \overset{M}{|} q[=]q \overset{M}{|} p[$.

i) $]p \overset{M}{|} q] = [q \overset{M}{|} p[$.

j) $[p \overset{M}{|} q[=]q \overset{M}{|} p]$

Beweis **364-4** a)

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

1: Aus Thema0 "$\alpha \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: p_M_α.

2: Aus →) "M symmetrisch" und
aus 1 "p_M_α"
folgt via **30-57**: α_M_p.

3: Aus 2 "α_M_p"
folgt via **41-25**: $\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

Ergo Thema0: $\forall\alpha : (\alpha \in [p \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} p])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

b)

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

1: Aus Thema0 "$\alpha \in]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha$.

2: Aus →) "M symmetrisch" und
aus 1 "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha$"
folgt via **364-3**: $\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$.

3: Aus 2 "$\alpha\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p$"
folgt via **41-25**: $\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} p[$.

Ergo Thema0: $\forall\alpha : (\alpha \in]p \overset{M}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} p[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} p[$.

<u>Beweis</u> **364-4** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$	$\alpha \in \langle \cdot \overset{M}{\mid} q]$.
1: Aus Thema0 "$\alpha \in \langle \cdot \overset{M}{\mid} q]$" folgt via **41-25**:	$\alpha \_ M \_ q$.
2: Aus →) "M symmetrisch" und aus 1 "$\alpha \_ M \_ q$" folgt via **30-57**:	$q \_ M \_ \alpha$.
3: Aus 2 "$q \_ M \_ \alpha$" folgt via **41-25**:	$\alpha \in [q \overset{M}{\mid} \cdot \rangle$.

Ergo Thema0: $\forall \alpha : (\alpha \in \langle \cdot \overset{M}{\mid} q]) \Rightarrow (\alpha \in [q \overset{M}{\mid} \cdot \rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\langle \cdot \overset{M}{\mid} q] \subseteq [q \overset{M}{\mid} \cdot \rangle$.

`d)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$	$\alpha \in \langle \cdot \overset{M}{\mid} q[$.
1: Aus Thema0 "$\alpha \in \langle \cdot \overset{M}{\mid} q[$" folgt via **41-25**:	$\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ q$.
2: Aus →) "M symmetrisch" und aus 1 "$\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ q$" folgt via **364-3**:	$q \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \alpha$.
3: Aus 2 "$q \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \alpha$" folgt via **41-25**:	$\alpha \in]q \overset{M}{\mid} \cdot \rangle$.

Ergo Thema0: $\forall \alpha : (\alpha \in \langle \cdot \overset{M}{\mid} q[) \Rightarrow (\alpha \in]q \overset{M}{\mid} \cdot \rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\langle \cdot \overset{M}{\mid} q[\subseteq]q \overset{M}{\mid} \cdot \rangle$.

<u>Beweis **364-4**</u> `e)`

`1.1:` Aus →) “M symmetrisch”

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`1.2:` Aus →) “M symmetrisch”

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\langle\cdot \overset{M}{|} p] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1.1` “$[p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} p]$” und

aus `1.2` “$\langle\cdot \overset{M}{|} p] \subseteq [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **GleichheitsAxiom**: $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle = \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`f)`

`1.1:` Aus →) “M symmetrisch”

folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} p[$.

`1.2:` Aus →) “M symmetrisch”

folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\langle\cdot \overset{M}{|} p[\subseteq]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `1.1` “$]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} p[$” und

aus `1.2` “$\langle\cdot \overset{M}{|} p[\subseteq]p \overset{M}{|} \cdot\rangle$”

folgt via **GleichheitsAxiom**: $]p \overset{M}{|} \cdot\rangle = \langle\cdot \overset{M}{|} p[$.

<u>Beweis</u> **364-4** `ghij)`

`1.1:` Aus →) “ M symmetrisch ”

folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle = \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`1.2:` Aus →) “ M symmetrisch ”

folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $]p \overset{M}{|} \cdot\rangle = \langle\cdot \overset{M}{|} p[$.

`1.3:` Aus →) “ M symmetrisch ”

folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\langle\cdot \overset{M}{|} q] = [q \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`1.4:` Aus →) “ M symmetrisch ”

folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\langle\cdot \overset{M}{|} q[=]q \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`2.g):` $[p \overset{M}{|} q] \overset{\mathbf{41-36}}{=} [p \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q] \overset{1.1}{=} \langle\cdot \overset{M}{|} p] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q] \overset{1.3}{=} \langle\cdot \overset{M}{|} p] \cap [q \overset{M}{|} \cdot\rangle$
$\overset{\mathbf{KG}\cap}{=} [q \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p] \overset{\mathbf{41-36}}{=} [q \overset{M}{|} p]$.

`2.h):` $]p \overset{M}{|} q[\overset{\mathbf{41-36}}{=}]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q[\overset{1.2}{=} \langle\cdot \overset{M}{|} p[\cap \langle\cdot \overset{M}{|} q[\overset{1.4}{=} \langle\cdot \overset{M}{|} p[\cap]q \overset{M}{|} \cdot\rangle$
$\overset{\mathbf{KG}\cap}{=}]q \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p[\overset{\mathbf{41-36}}{=}]q \overset{M}{|} p[$.

`2.i):` $]p \overset{M}{|} q] \overset{\mathbf{41-36}}{=}]p \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q] \overset{1.2}{=} \langle\cdot \overset{M}{|} p[\cap \langle\cdot \overset{M}{|} q] \overset{1.3}{=} \langle\cdot \overset{M}{|} p[\cap [q \overset{M}{|} \cdot\rangle$
$\overset{\mathbf{KG}\cap}{=} [q \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p[\overset{\mathbf{41-36}}{=} [q \overset{M}{|} p[$.

`2.j):` $[p \overset{M}{|} q[\overset{\mathbf{41-36}}{=} [p \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q[\overset{1.1}{=} \langle\cdot \overset{M}{|} p] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q[\overset{1.4}{=} \langle\cdot \overset{M}{|} p] \cap]q \overset{M}{|} \cdot\rangle$
$\overset{\mathbf{KG}\cap}{=}]q \overset{M}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p] \overset{\mathbf{41-36}}{=}]q \overset{M}{|} p]$.

□

364-5. Die Intervalle $[p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle$ und $]p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle$ sind spezielle Mengen.

364-5(Satz)

a) *"$(p,q) \in \mathsf{id}$" genau dann, wenn "$(p = q) \wedge (p,q$ Menge$)$" genau dann, wenn "$p = q$ Menge" genau dann, wenn "$(p = q) \wedge (p$ Menge$)$".*

b) *"$(p,p) \in \mathsf{id}$" genau dann, wenn "p Menge".*

c) $\mathsf{id}_D \subseteq \mathsf{id}$.

d) $[p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle = \langle\cdot \overset{\mathsf{id}}{|} p] = \{p\}$.

e) $]p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle = \langle\cdot \overset{\mathsf{id}}{|} p[= 0$.

Beweis **364-5** a) $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich $(p,q) \in \mathsf{id}$.

1.1: Aus VS gleich "$(p,q) \in \mathsf{id}$"

folgt via **folk**: $\boxed{p,q \text{ Menge}}$

1.2: Aus VS gleich "$(p,q) \in \mathsf{id}$" und
aus **20-7(Def)** "$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $(p,q) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

2: Aus 1.2 "$(p,q) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"

folgt via **20-10**: $\boxed{p = q}$

a) $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ VS gleich $(p = q) \wedge (p,q \text{ Menge})$.

Aus VS
folgt: $p = q$ Menge.

<u>Beweis **364-5**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $p = q$ Menge.

`1.1:` Aus `VS` folgt: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $\boxed{p = q}$

`a)` $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p = q) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **folk**: $p \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$p = q \ldots$"
folgt via **20-10**: $(p, q) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

`3:` Aus 2 und
aus **20-7(Def)**"$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $(p, q) \in \mathsf{id}$.

`b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(p, p) \in \mathsf{id}$.

Aus `VS` gleich "$(p, p) \in \mathsf{id}$"
folgt via **folk**: p Menge.

`b)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich p Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **folk**: $p \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **20-9**: $(p, p) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

`3:` Aus 2 und
aus **20-7(Def)**"$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $(p, p) \in \mathsf{id}$.

`c)`

`1:` Via **20-13** gilt: id_D Einschränkung von id auf D.

`2:` Aus `1`"id_D Einschränkung von id auf D"
folgt via **15-3**: $\mathsf{id}_D \subseteq \mathsf{id}$.

Beweis **364-5** `d)`

`Thema0.1` $\alpha \in [p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle.$

`1:` Aus `Thema0.1` "$\alpha \in [p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: $p\_\mathsf{id}\_\alpha.$

`2:` Aus `1`
folgt: $(p, \alpha) \in \mathsf{id}.$

`3:` Aus `2` "$(p, \alpha) \in \mathsf{id}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p = \alpha$ Menge.

`4:` Aus `3` "$p = \alpha \ldots$"
folgt: $\alpha = p.$

`5:` Aus `4` "$\alpha = p$" und
aus `3` "$\ldots \alpha$ Menge"
folgt via **1-6**: $\alpha \in \{p\}.$

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha.(\alpha \in [p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\alpha \in \{p\}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$[p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle \subseteq \{p\}$"

...

Beweis **364-5** `d)` ...

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$ $\alpha \in \{p\}$.

`1:` Aus `Thema0.2` "$\alpha \in \{p\}$"
folgt via **folk**: $(\alpha = p) \wedge (\alpha \text{ Menge})$

`2:` Aus `1` "$\alpha = p \ldots$"
folgt: $p = \alpha$.

`3:` Aus `2` "$p = \alpha$" und
aus `1` "$\ldots \alpha$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(p, \alpha) \in \mathsf{id}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $p \_ \mathsf{id} \_ \alpha$.

`5:` Aus `4` "$p \_ \mathsf{id} \_ \alpha$"
folgt via **41-25**: $\alpha \in [p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p\}) \Rightarrow (\alpha \in [p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“}\{p\} \subseteq [p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle\text{”}}$

`1.1:` Aus `A1` gleich "$[p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle \subseteq \{p\}$" und
aus `A2` gleich "$\{p\} \subseteq [p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{[p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle = \{p\}}$

`1.2:` Aus **294-6** "id symmetrisch"
folgt via **364-4**: $\boxed{[p \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle = \langle\cdot \overset{\mathsf{id}}{|} p]}$

Beweis **364-5** `e)`

`Thema0.1` $\alpha\in\,]p\overset{\mathsf{id}}{|}\cdot\rangle.$

`1:` Aus `Thema0.1`“$\alpha\in\,]p\overset{\mathsf{id}}{|}\cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: $p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{id}}\_\alpha.$

`2:` Aus `1`“$p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{id}}\_\alpha$”
folgt via **41-3**: $(p\_\mathsf{id}\_\alpha)\wedge(p\neq\alpha).$

`3:` Aus `2`“$p\_\mathsf{id}\_\alpha\ldots$”
folgt: $(p,\alpha)\in\mathsf{id}.$

`4:` Aus `3`“$(p,\alpha)\in\mathsf{id}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p=\alpha.$

`5:` Aus `2`
folgt: $p\neq\alpha.$

Ergo `Thema0.1`: $\forall\alpha:(\alpha\in\,]p\overset{\mathsf{id}}{|}\cdot\rangle)\Rightarrow(\alpha\notin\,]p\overset{\mathsf{id}}{|}\cdot\rangle).$

Konsequenz via **folk**: $\boxed{]p\overset{\mathsf{id}}{|}\cdot\rangle=0}$

`0.2:` Aus **294-6**“id symmetrisch”

folgt via **364-4**: $\boxed{]p\overset{\mathsf{id}}{|}\cdot\rangle=\langle\cdot\overset{\mathsf{id}}{|}p[}$

□

364-6. Die Aussage $x. = q$ auf E ist unter anderem äquivalent zu $x.\mathsf{id}\_q$ auf E.

364-6(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $x. = q$ *auf* E.

`ii)` "$(x \upharpoonleft E)$ *Funktion*" *und* "$E \subseteq x^{-1}[\{q\}]$".

`iii)` "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" *und* "$x[E] \subseteq \{q\}$".

`iv)` "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" *und* "$x[E] \subseteq \langle \cdot \overset{\mathsf{id}}{|} q]$".

`v)` $x.\mathsf{id}\_q$ *auf* E.

<u>Beweis **364-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x. = q$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x. = q$ auf E"

folgt via **228-8**: $\boxed{E \subseteq x^{-1}[\{q\}]}$

`1.2:` Via **258-11** gilt: $(x \downharpoonleft E)$ Relation.

> $\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in (x \downharpoonleft E)$.
>
> `2.1:` Aus `Thema1.3`"$(\alpha, \beta) \ldots \in (x \downharpoonleft E)$"
> folgt via **299-5**: $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.
>
> `2.2:` Aus `Thema1.3`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in (x \downharpoonleft E)$"
> folgt via **299-5**: $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \gamma) \in x)$.
>
> `3.1:` Aus `VS` gleich "$x. = q$ auf E" und
> aus `2.1`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
> folgt via **228-1(Def)**: $\beta = q$.
>
> `3.2:` Aus `VS` gleich "$x. = q$ auf E" und
> aus `2.2`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \gamma) \in x)$"
> folgt via **228-1(Def)**: $\gamma = q$.
>
> `4:` Aus `3.1` und
> aus `3.2`
> folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.3`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in (x \downharpoonleft E)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`2:` Aus `1.2`"$(x \downharpoonleft E)$ Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in (x \downharpoonleft E)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

folgt via **18-18(Def)**: $\boxed{(x \downharpoonleft E) \text{ Funktion}}$

Beweis **364-6** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $((x \restriction E) \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq x^{-1}[\{q\}])$.

`1.1`: Via **11-19** gilt: $x^{-1}[\{q\}] \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`Thema1.2` $\alpha \in x[E]$.

`2`: Aus `Thema1.2` "$\alpha \in x[E]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`3.1`: Aus `2` "$\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$"
folgt via **299-5**: $(\Omega, \alpha) \in (x \restriction E)$.

`3.2`: Aus `2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq x^{-1}[\{q\}]$"
folgt via **folk**: $\Omega \in x^{-1}[\{q\}]$.

`4`: Aus `3.2` "$\Omega \in x^{-1}[\{q\}]$"
folgt via **12-7**: $(\Omega, q) \in x$.

`5`: Aus `2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `4` "$(\Omega, q) \in x$"
folgt via **299-5**: $(\Omega, q) \in (x \restriction E)$.

`6`: Aus `VS` gleich "$(x \restriction E)$ Funktion…",
aus `3.1` "$(\Omega, \alpha) \in (x \restriction E)$" und
aus `5` "$(\Omega, q) \in (x \restriction E)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\alpha = q$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[E]) \Rightarrow (\alpha = q)$.

Konsequenz via **1-10**: $\boxed{x[E] \subseteq \{q\}}$

`2`: Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq x^{-1}[\{q\}]$" und
aus `1.1` "$x^{-1}[\{q\}] \subseteq \mathsf{dom}\, x$"

folgt via **folk**: $\boxed{E \subseteq \mathsf{dom}\, x}$

<u>Beweis</u> **364-6** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \{q\})$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{E \subseteq \mathsf{dom}\, x}$

`1.2:` Via **364-5** gilt: $\langle \cdot \stackrel{\mathsf{id}}{|} q] = \{q\}$.

`2:` Aus `1.2` und
aus `VS`

folgt: $\boxed{x[E] \subseteq \langle \cdot \stackrel{\mathsf{id}}{|} q]}$

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle \cdot \stackrel{\mathsf{id}}{|} q])$.

Aus `VS` gleich "$(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle \cdot \stackrel{\mathsf{id}}{|} q])$"
folgt via **361-12(Def)**: $x.\mathsf{id}\_q$ auf E.

<u>Beweis **364-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x.\mathsf{id}\_q$ auf E.

`1`: Aus `VS` gleich "$x.\mathsf{id}\_q$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle \cdot \stackrel{\mathsf{id}}{|} q])$.

> $\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.
>
> `3`: Aus `Thema2.1`"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
> folgt via **folk**: $\beta \in x[E]$.
>
> `4`: Aus `3`"$\beta \in x[E]$" und
> aus `1`"$\ldots x[E] \subseteq \langle \cdot \stackrel{\mathsf{id}}{|} q]$"
> folgt via **folk**: $\beta \in \langle \cdot \stackrel{\mathsf{id}}{|} q]$.
>
> `5`: Aus `4`"$\beta \in \langle \cdot \stackrel{\mathsf{id}}{|} q]$"
> folgt via **41-25**: $(\beta, q) \in \mathsf{id}$.
>
> `6`: Aus `5`"$(\beta, q) \in \mathsf{id}$"
> folgt via **364-5**: $\beta = q$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = q)$"

`2.2`: Aus `1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = q)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. = q$ auf E.

$\square$

364-7. Durch Negation ergeben sich aus **364-6** Kriterien für $\neg(x.\mathsf{id}\_q$ auf $E)$.

364-7(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $\neg(x. = q$ *auf* $E)$.

`ii)` "$(x \downharpoonleft E)$ *keine Funktion*" *oder* "$E \not\subseteq x^{-1}[\{q\}]$".

`iii)` "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" *oder* "$x[E] \not\subseteq \{q\}$".

`iv)` "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" *oder* "$x[E] \not\subseteq \langle\cdot \overset{\mathsf{id}}{|} q]$".

`v)` $\neg(x.\mathsf{id}\_q$ *auf* $E)$.

<u>Beweis **364-7**</u>

1: Via **364-6** gilt: $(x. = q \text{ auf } E)$

$$\Leftrightarrow (((x \downharpoonleft E) \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq x^{-1}[\{q\}]))$$

$$\Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \{q\}))$$

$$\Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{\mathsf{id}}{\mid} q]))$$

$$\Leftrightarrow (x.\mathsf{id}\_q \text{ auf } E).$$

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x. = q \text{ auf } E))$

$$\Leftrightarrow ((\neg((x \downharpoonleft E) \text{ Funktion})) \vee (\neg(E \subseteq x^{-1}[\{q\}])))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(x[E] \subseteq \{q\})))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(x[E] \subseteq \langle\cdot \overset{\mathsf{id}}{\mid} q])))$$

$$\Leftrightarrow (\neg(x.\mathsf{id}\_q \text{ auf } E)).$$

3: Aus 2
folgt: $(\neg(x. = q \text{ auf } E))$

$$\Leftrightarrow ((\neg((x \downharpoonleft E) \text{ Funktion})) \vee (E \not\subseteq x^{-1}[\{q\}]))$$

$$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (x[E] \not\subseteq \{q\}))$$

$$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (x[E] \not\subseteq \langle\cdot \overset{\mathsf{id}}{\mid} q]))$$

$$\Leftrightarrow (\neg(x.\mathsf{id}\_q \text{ auf } E)).$$

4: Aus 3
folgt via **18-18(Def)**: $(\neg(x. = q \text{ auf } E))$

$$\Leftrightarrow (((x \downharpoonleft E) \text{ keine Funktion}) \vee (E \not\subseteq x^{-1}[\{q\}]))$$

$$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (x[E] \not\subseteq \{q\}))$$

$$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (x[E] \not\subseteq \langle\cdot \overset{\mathsf{id}}{\mid} q]))$$

$$\Leftrightarrow (\neg(x.\mathsf{id}\_q \text{ auf } E)).$$

$\square$

364-8. Bei $x. \neq q$ auf E ist es von Bedeutung, ob q eine Menge oder eine Unmenge ist.

364-8(Satz)

a) *Aus* "$x. \neq q$ *auf* E" *folgt* "$\neg(x.\mathsf{id}_{\_}q)$ *auf* E".

b) *Aus* "q *Menge*" *und* "$\neg(x.\mathsf{id}_{\_}q)$ *auf* E" *folgt* "$x. \neq q$ *auf* E".

c) *Aus* "q *Menge*" *und* "$\neg(x. \neq q$ *auf* $E)$" *folgt* "$\neg(\neg(x.\mathsf{id}_{\_}q)$ *auf* $E)$".

d) *Aus* "$\neg(\neg(x.\mathsf{id}_{\_}q)$ *auf* $E)$" *folgt* "$\neg(x. \neq q$ *auf* $E)$".

Beweis **364-8** a) VS gleich $x. \neq q$ auf E.

1.1: Aus VS gleich "$x. \neq q$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

Thema1.2 $\alpha \in x[E] \cap \langle \cdot \overset{\mathsf{id}}{|} q]$.

2: Aus Thema1.2"$\alpha \in x[E] \cap \langle \cdot \overset{\mathsf{id}}{|} q]$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in x[E]) \wedge (\alpha \in \langle \cdot \overset{\mathsf{id}}{|} q])$.

3.1: Aus 2"$\alpha \in x[E] \ldots$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

3.2: Via **364-5** gilt: $\langle \cdot \overset{\mathsf{id}}{|} q] = \{q\}$.

4.1: Aus VS gleich "$x. \neq q$ auf E" und
aus 3.1"$\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$"
folgt via **228-1(Def)**: $\alpha \neq q$.

4.2: Aus 2"$\ldots \alpha \in \langle \cdot \overset{\mathsf{id}}{|} q]$" und
aus 3.2
folgt: $\alpha \in \{q\}$.

5: Aus 4.2"$\alpha \in \{q\}$"
folgt via **folk**: $\alpha = q$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in x[E] \cap \langle \cdot \overset{\mathsf{id}}{|} q]) \Rightarrow (\alpha \notin x[E] \cap \langle \cdot \overset{\mathsf{id}}{|} q])$.

Konsequenz via **folk**: A1 | "$x[E] \cap \langle \cdot \overset{\mathsf{id}}{|} q] = 0$"

2: Aus 1.1"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus A1 gleich "$x[E] \cap \langle \cdot \overset{\mathsf{id}}{|} q] = 0$"
folgt via **361-12(Def)**: $\neg(x.\mathsf{id}\_q)$ auf E.

<u>Beweis **364-8**</u> `b)` `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.\mathsf{id}\_q) \text{ auf } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(x.\mathsf{id}\_q)$ auf E"
folgt via **361-12**: $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap [q \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle = 0)$.

> `Thema2.1` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.
>
> `3:` Aus `Thema2.1` "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$"
> folgt via **folk**: $\beta \in x[E]$.
>
> `4:` Aus `1` "$\ldots x[E] \cap [q \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle = 0$" und
> aus `3` "$\beta \in x[E]$"
> folgt via **161-1**: $\beta \notin [q \overset{\mathsf{id}}{|} \cdot\rangle$.
>
> `5:` Via **364-5** gilt: $\langle\cdot \overset{\mathsf{id}}{|} q] = \{q\}$.
>
> `6:` Aus `4` und
> aus `5`
> folgt: $\beta \notin \{q\}$.
>
> `7:` Aus `6` "$\beta \notin \{q\}$"
> folgt via **1-7**: $(\beta \neq q) \vee (q \text{ Unmenge})$.
>
> `8:` Aus `7` und
> aus `VS` gleich "q Menge$\ldots$"
> folgt: $\beta \neq q$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq q)$"

`2.2:` Aus `1` "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq q)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \neq q$ auf E.

<u>Beweis</u> **<u>364-8</u>** `c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:

$$((q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x.\mathsf{id}\_q) \text{ auf } E)) \Rightarrow (x. \neq q \text{ auf } E).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$((q \text{ Menge}) \wedge (\neg(x. \neq q \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(\neg(x.\mathsf{id}\_q) \text{ auf } E)).$$

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $$(x. \neq q \text{ auf } E) \Rightarrow (\neg(x.\mathsf{id}\_q) \text{ auf } E).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(\neg(x.\mathsf{id}\_q) \text{ auf } E)) \Rightarrow (\neg(x. \neq q) \text{ auf } E).$$

$\square$

364-9. Es wird ein weiterer klassentheoretischer Aspekt der Symmetrie herausgearbeitet. Die weiteren Resultate sind kosmetischer Natur.

364-9(Satz)

a) *"M symmetrisch" genau dann, wenn "$M^{-1} \subseteq M$"*
genau dann, wenn "$M^{-1} = (M^{-1})^{-1}$".

b) *Aus "r Relation" folgt "$D \cap r = (D^{-1})^{-1} \cap r$".*

c) *Aus "r Relation" folgt "$r \cap D = r \cap (D^{-1})^{-1}$".*

Beweis **364-9** a) $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich M symmetrisch.

Aus VS gleich "M symmetrisch"
folgt via **363-4**: $M^{-1} \subseteq M$.

a) $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $M^{-1} \subseteq M$.

1.1: Aus VS gleich "$M^{-1} \subseteq M$"
folgt via **11-6**: $(M^{-1})^{-1} \subseteq M^{-1}$.

1.2: Via **11-7** gilt: M^{-1} Relation.

2: Aus 1.2 "M^{-1} Relation" und
aus VS gleich "$M^{-1} \subseteq M$"
folgt via **13-3**: $M^{-1} \subseteq (M^{-1})^{-1}$.

3: Aus 2 "$M^{-1} \subseteq (M^{-1})^{-1}$" und
aus 1.1 "$(M^{-1})^{-1} \subseteq M^{-1}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $M^{-1} = (M^{-1})^{-1}$.

a) $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $M^{-1} = (M^{-1})^{-1}$.

1: Via **13-3** gilt: $(M^{-1})^{-1} \subseteq M$.

2: Aus 1 und
aus VS
folgt: $M^{-1} \subseteq M$.

3: Aus 2 "$M^{-1} \subseteq M$"
folgt via **363-4**: M symmetrisch.

<u>Beweis **364-9**</u> `b)` `VS` gleich r Relation.

`1.1:` Via **13-3** gilt: $(D^{-1})^{-1} \subseteq D$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in D \cap r$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in D \cap r$”
folgt via **folk**: $(\alpha \in D) \wedge (\alpha \in r)$.

`3:` Aus `VS` gleich “r Relation” und
aus `2`“$\ldots \alpha \in r$”
folgt via **10-2**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

`4:` Aus `2`“$\alpha \in D \ldots$” und
aus `3`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$”
folgt: $(\Omega, \Psi) \in D$.

`5:` Aus `4`“$(\Omega, \Psi) \in D$”
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Psi) \in (D^{-1})^{-1}$.

`6:` Aus `3`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus `5`
folgt: $\alpha \in (D^{-1})^{-1}$.

`7:` Aus `6`“$\alpha \in (D^{-1})^{-1}$” und
aus `2`“$\ldots \alpha \in r$”
folgt via **folk**: $\alpha \in (D^{-1})^{-1} \cap r$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in D \cap r) \Rightarrow (\alpha \in (D^{-1})^{-1} \cap r)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“} D \cap r \subseteq (D^{-1})^{-1} \cap r \text{”}}$

`2:` Aus `1.1`“$(D^{-1})^{-1} \subseteq D$”
folgt via **2-15**: $(D^{-1})^{-1} \cap r \subseteq D \cap r$.

`3:` Aus `A1` gleich “$D \cap r \subseteq (D^{-1})^{-1} \cap r$” und
aus `2`“$(D^{-1})^{-1} \cap r \subseteq D \cap r$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $D \cap r = (D^{-1})^{-1} \cap r$.

`c)` `VS` gleich r Relation.

`1:` Aus `VS` gleich “r Relation”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $D \cap r = (D^{-1})^{-1} \cap r$.

`2:` $r \cap D \stackrel{\text{KG}\cap}{=} D \cap r \stackrel{1}{=} (D^{-1})^{-1} \cap r \stackrel{\textbf{KG}\cap}{=} r \cap (D^{-1})^{-1}$.

$\square$

364-10. Ist M symmetrisch, so ergibt sich via **364-4** Ähnliches zu **364-2**.

364-10(Satz)

a) *Aus "M symmetrisch" und "$\neg(p\_M.x$ auf $E)$" folgt "$\neg(x.M\_p$ auf $E)$".*

b) *Aus "M symmetrisch" und "$\neg(x.M\_q$ auf $E)$" folgt "$\neg(q\_M.x$ auf $E)$".*

c) *Aus "M symmetrisch" und "$\neg(x.M.y$ auf $E)$" folgt "$\neg(y.M.x$ auf $E)$".*

d) *Aus "M symmetrisch" und "$\neg(p\_M.x)$ auf E" folgt "$\neg(x.M\_p)$ auf E".*

e) *Aus "M symmetrisch" und "$\neg(x.M\_q)$ auf E" folgt "$\neg(q\_M.x)$ auf E".*

f) *Aus "M symmetrisch" und "$\neg(x.M.y)$ auf E" folgt "$\neg(y.M.x)$ auf E".*

g) *Aus "M symmetrisch" und "$\neg(\neg(p\_M.x)$ auf $E)$" folgt "$\neg(\neg(x.M\_p)$ auf $E)$".*

h) *Aus "M symmetrisch" und "$\neg(\neg(x.M\_q)$ auf $E)$" folgt "$\neg(\neg(q\_M.x)$ auf $E)$".*

i) *Aus "M symmetrisch" und "$\neg(\neg(x.M.y)$ auf $E)$" folgt "$\neg(\neg(y.M.x)$ auf $E)$".*

Beweis **364-10** a)

1: Via **364-2** gilt: $((M \text{ symmetrisch}) \wedge (x.M\_p \text{ auf } E)) \Rightarrow (p\_M.x \text{ auf } E)$.

2: Aus 1
folgt: $((M \text{ symmetrisch}) \wedge (\neg(p\_M.x \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(x.M\_p \text{ auf } E))$.

b)

1: Via **364-2** gilt: $((M \text{ symmetrisch}) \wedge (q\_M.x \text{ auf } E)) \Rightarrow (x.M\_q \text{ auf } E)$.

2: Aus 1
folgt: $((M \text{ symmetrisch}) \wedge (\neg(x.M\_q \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(q\_M.x \text{ auf } E))$.

<u>Beweis **364-10**</u> `c)`

`1:` Via **364-2** gilt: $((M \text{ symmetrisch}) \wedge (y.M.x \text{ auf } E)) \Rightarrow (x.M.y \text{ auf } E)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((M \text{ symmetrisch}) \wedge (\neg(x.M.y \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(y.M.x \text{ auf } E))$.

`d)` `VS` gleich $(M \text{ symmetrisch}) \wedge (\neg(p\_M.x) \text{ auf } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(p\_M.x)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch…"
folgt via **364-4**: $[p \overset{M}{|} \cdot\rangle = \langle\cdot \overset{M}{|} p]$.

`3:` Aus `1` "$\ldots x[E] \cap [p \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$" und
aus `2`
folgt: $x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p] = 0$.

`4:` Aus `1` "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `3` "$x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} p] = 0$"
folgt via **361-12(Def)**: $\neg(x.M\_p)$ auf E.

`e)` `VS` gleich $(M \text{ symmetrisch}) \wedge (\neg(x.M\_q) \text{ auf } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(x.M\_q)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $(E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q] = 0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch…"
folgt via **364-4**: $\langle\cdot \overset{M}{|} q] = [q \overset{M}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `1` "$\ldots x[E] \cap \langle\cdot \overset{M}{|} q] = 0$" und
aus `2`
folgt: $x[E] \cap [q \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$.

`4:` Aus `1` "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `3` "$x[E] \cap [q \overset{M}{|} \cdot\rangle = 0$"
folgt via **361-12(Def)**: $\neg(q\_M.x)$ auf E.

<u>Beweis **364-10**</u> `f)` `VS` gleich $(M \text{ symmetrisch}) \wedge (\neg(x.M.y) \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "M symmetrisch ..."
folgt via **364-9**: $M^{-1} = (M^{-1})^{-1}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(x.M.y)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**:
$$(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E] = 0).$$

`1.3:` Via **364-1** gilt: $\mathsf{paar}(y,x)[E]$ Relation.

`2.1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) = (\mathsf{dom}\, y) \cap (\mathsf{dom}\, x)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E] = 0$"
folgt: $(M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1} = 0^{-1}$.

`2.3:` Aus `1.3`"$\mathsf{paar}(y,x)[E]$ Relation"
folgt via **364-9**: $M \cap \mathsf{paar}(y,x)[E] = (M^{-1})^{-1} \cap \mathsf{paar}(y,x)[E]$.

`3.1:` Aus `1.2`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y) \ldots$" und
aus `2.1`
folgt: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, y) \cap (\mathsf{dom}\, x)$.

`3.2:` $M \cap \mathsf{paar}(y,x)[E] \stackrel{2.3}{=} (M^{-1})^{-1} \cap \mathsf{paar}(y,x)[E] \stackrel{1.1}{=} M^{-1} \cap \mathsf{paar}(y,x)[E]$

$$\stackrel{\mathbf{364-1}}{=} M^{-1} \cap (\mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1} \stackrel{\mathbf{12-1}}{=} (M \cap \mathsf{paar}(x,y)[E])^{-1} \stackrel{2.2}{=} 0^{-1} \stackrel{\mathbf{11-10}}{=} 0.$$

`4:` Aus `3.1`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, y) \cap (\mathsf{dom}\, x)$" und
aus `3.2`"$M \cap \mathsf{paar}(y,x)[E] = \ldots = 0$"
folgt via **361-12(Def)**: $\neg(y.M.x)$ auf E.

<u>Beweis</u> **364-10** `g)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt:
$$((M \text{ symmetrisch}) \wedge (\neg(x.M\_p) \text{ auf } E)) \Rightarrow (\neg(p\_M.x) \text{ auf } E).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$((M \text{ symmetrisch}) \wedge (\neg(\neg(p\_M.x) \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(\neg(x.M\_p) \text{ auf } E)).$$

`h)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:
$$((M \text{ symmetrisch}) \wedge (\neg(q\_M.x) \text{ auf } E)) \Rightarrow (\neg(x.M\_q) \text{ auf } E).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$((M \text{ symmetrisch}) \wedge (\neg(\neg(x.M\_q) \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(\neg(q\_M.x) \text{ auf } E)).$$

`i)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt:
$$((M \text{ symmetrisch}) \wedge (\neg(y.M.x) \text{ auf } E)) \Rightarrow (\neg(x.M.y) \text{ auf } E).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$((M \text{ symmetrisch}) \wedge (\neg(\neg(x.M.y) \text{ auf } E))) \Rightarrow (\neg(\neg(y.M.x) \text{ auf } E)).$$

$\square$

364-11. Mit den vorliegenden Erkenntnissen erübrigen sich weitere Untersuchungen von $p\_\mathsf{id}.x$ auf E und $\neg(p\_\mathsf{id}.x)$ auf E und deren Negationen.

364-11(Satz)

a) *"$p\_\mathsf{id}.x$ auf E" genau dann, wenn "$x.\mathsf{id}\_p$ auf E".*

b) *"$x.\mathsf{id}\_q$ auf E" genau dann, wenn "$q\_\mathsf{id}.x$ auf E".*

c) *"$x.\mathsf{id}.y$ auf E" genau dann, wenn "$y.\mathsf{id}.x$ auf E".*

d) *"$\neg(p\_\mathsf{id}.x$ auf $E)$" genau dann, wenn "$\neg(x.\mathsf{id}\_p$ auf $E)$".*

e) *"$\neg(x.\mathsf{id}\_q$ auf $E)$" genau dann, wenn "$\neg(q\_\mathsf{id}.x$ auf $E)$".*

f) *"$\neg(x.\mathsf{id}.y$ auf $E)$" genau dann, wenn "$\neg(y.\mathsf{id}.x$ auf $E)$".*

g) *"$\neg(p\_\mathsf{id}.x)$ auf E" genau dann, wenn "$\neg(x.\mathsf{id}\_p)$ auf E".*

h) *"$\neg(x.\mathsf{id}\_q)$ auf E" genau dann, wenn "$\neg(q\_\mathsf{id}.x)$ auf E".*

i) *"$\neg(x.\mathsf{id}.y)$ auf E" genau dann, wenn "$\neg(y.\mathsf{id}.x)$ auf E".*

j) *"$\neg(\neg(p\_\mathsf{id}.x)$ auf $E)$" genau dann, wenn "$\neg(\neg(x.\mathsf{id}\_p)$ auf $E)$".*

k) *"$\neg(\neg(x.\mathsf{id}\_q)$ auf $E)$" genau dann, wenn "$\neg(\neg(q\_\mathsf{id}.x)$ auf $E)$".*

l) *"$\neg(\neg(x.\mathsf{id}.y)$ auf $E)$" genau dann, wenn "$\neg(\neg(y.\mathsf{id}.x)$ auf $E)$".*

Beweis **364-11** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $p\_\mathsf{id}.x$ auf E.

Aus **294-6**"id symmetrisch" und
aus VS gleich "$p\_\mathsf{id}.x$ auf E"
folgt via **364-2**: $x.\mathsf{id}\_p$ auf E.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $x.\mathsf{id}\_p$ auf E.

Aus **294-6**"id symmetrisch" und
aus VS gleich "$x.\mathsf{id}\_p$ auf E"
folgt via **364-2**: $p\_\mathsf{id}.x$ auf E.

Beweis **364-11** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x.\mathsf{id}\_q$ auf E.

Aus **294-6** "id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$x.\mathsf{id}\_q$ auf E"
folgt via **364-2**: $q\_\mathsf{id}.x$ auf E.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $q\_\mathsf{id}.x$ auf E.

Aus **294-6** "id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$q\_\mathsf{id}.x$ auf E"
folgt via **364-2**: $x.\mathsf{id}\_q$ auf E.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x.\mathsf{id}.y$ auf E.

Aus **294-6** "id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$x.\mathsf{id}.y$ auf E"
folgt via **364-2**: $y.\mathsf{id}.x$ auf E.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $y.\mathsf{id}.x$ auf E.

Aus **294-6** "id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$y.\mathsf{id}.x$ auf E"
folgt via **364-2**: $x.\mathsf{id}.y$ auf E.

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\neg(p\_\mathsf{id}.x$ auf $E)$.

Aus **294-6** "id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$\neg(p\_\mathsf{id}.x$ auf $E)$"
folgt via **364-10**: $\neg(x.\mathsf{id}\_p$ auf $E)$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\neg(x.\mathsf{id}\_p$ auf $E)$.

Aus **294-6** "id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{id}\_p$ auf $E)$"
folgt via **364-10**: $\neg(p\_\mathsf{id}.x$ auf $E)$.

`e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\neg(x.\mathsf{id}\_q$ auf $E)$.

Aus **294-6** "id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{id}\_q$ auf $E)$"
folgt via **364-10**: $\neg(q\_\mathsf{id}.x$ auf $E)$.

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\neg(q\_\mathsf{id}.x$ auf $E)$.

Aus **294-6** "id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$\neg(q\_\mathsf{id}.x$ auf $E)$"
folgt via **364-10**: $\neg(x.\mathsf{id}\_q$ auf $E)$.

<u>Beweis **364-11**</u> `f)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\neg(x.\mathsf{id}.y \text{ auf } E)$.

Aus **294-6**"id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{id}.y \text{ auf } E)$"
folgt via **364-10**: $\neg(y.\mathsf{id}.x \text{ auf } E)$.

`f)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\neg(y.\mathsf{id}.x \text{ auf } E)$.

Aus **294-6**"id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$\neg(y.\mathsf{id}.x \text{ auf } E)$"
folgt via **364-10**: $\neg(x.\mathsf{id}.y \text{ auf } E)$.

`g)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\neg(p\_\mathsf{id}.x)$ auf E.

Aus **294-6**"id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$\neg(p\_\mathsf{id}.x)$ auf E"
folgt via **364-10**: $\neg(x.\mathsf{id}\_p)$ auf E.

`g)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\neg(x.\mathsf{id}\_p)$ auf E.

Aus **294-6**"id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{id}\_p)$ auf E"
folgt via **364-10**: $\neg(p\_\mathsf{id}.x)$ auf E.

`h)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\neg(x.\mathsf{id}\_q)$ auf E.

Aus **294-6**"id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{id}\_q)$ auf E"
folgt via **364-10**: $\neg(q\_\mathsf{id}.x)$ auf E.

`h)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\neg(q\_\mathsf{id}.x)$ auf E.

Aus **294-6**"id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$\neg(q\_\mathsf{id}.x)$ auf E"
folgt via **364-10**: $\neg(x.\mathsf{id}\_q)$ auf E.

`i)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\neg(x.\mathsf{id}.y)$ auf E.

Aus **294-6**"id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{id}.y)$ auf E"
folgt via **364-10**: $\neg(y.\mathsf{id}.x)$ auf E.

`i)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\neg(y.\mathsf{id}.x)$ auf E.

Aus **294-6**"id symmetrisch" und
aus `VS` gleich "$\neg(y.\mathsf{id}.x)$ auf E"
folgt via **364-10**: $\neg(x.\mathsf{id}.y)$ auf E.

<u>Beweis **364-11**</u> `j)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\neg(\neg(p\_\mathsf{id}.x)\text{ auf }E)$.

Aus **294-6**“ id symmetrisch” und
aus `VS` gleich “ $\neg(\neg(p\_\mathsf{id}.x)\text{ auf }E)$ ”
folgt via **364-10**: $\neg(\neg(x.\mathsf{id}\_p)\text{ auf }E)$.

`j)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\neg(\neg(x.\mathsf{id}\_p)\text{ auf }E)$.

Aus **294-6**“ id symmetrisch” und
aus `VS` gleich “ $\neg(\neg(x.\mathsf{id}\_p)\text{ auf }E)$ ”
folgt via **364-10**: $\neg(\neg(p\_\mathsf{id}.x)\text{ auf }E)$.

`k)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\neg(\neg(x.\mathsf{id}\_q)\text{ auf }E)$.

Aus **294-6**“ id symmetrisch” und
aus `VS` gleich “ $\neg(\neg(x.\mathsf{id}\_q)\text{ auf }E)$ ”
folgt via **364-10**: $\neg(\neg(q\_\mathsf{id}.x)\text{ auf }E)$.

`k)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\neg(\neg(q\_\mathsf{id}.x)\text{ auf }E)$.

Aus **294-6**“ id symmetrisch” und
aus `VS` gleich “ $\neg(\neg(q\_\mathsf{id}.x)\text{ auf }E)$ ”
folgt via **364-10**: $\neg(\neg(x.\mathsf{id}\_q)\text{ auf }E)$.

`l)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\neg(\neg(x.\mathsf{id}.y)\text{ auf }E)$.

Aus **294-6**“ id symmetrisch” und
aus `VS` gleich “ $\neg(\neg(x.\mathsf{id}.y)\text{ auf }E)$ ”
folgt via **364-10**: $\neg(\neg(y.\mathsf{id}.x)\text{ auf }E)$.

`l)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\neg(\neg(y.\mathsf{id}.x)\text{ auf }E)$.

Aus **294-6**“ id symmetrisch” und
aus `VS` gleich “ $\neg(\neg(y.\mathsf{id}.x)\text{ auf }E)$ ”
folgt via **364-10**: $\neg(\neg(x.\mathsf{id}.y)\text{ auf }E)$.

□

364-12. Einige Kriterien verkürzen Argumentationen.

364-12(Satz)

a) *"$(p,p) \in \mathsf{id}_D$" genau dann, wenn "$p\_\mathsf{id}_D\_p$"*
genau dann, wenn "$p \in D$".

b) *"$(p,p) \notin \mathsf{id}_D$" genau dann, wenn "$\neg(p\_\mathsf{id}_D\_p)$"*
genau dann, wenn "$p \notin D$".

c) *"$(p,q) \notin \mathsf{id}_D$" genau dann, wenn "$\neg(p\_\mathsf{id}_D\_q)$"*
genau dann, wenn "$(p \neq q) \vee (p \notin D)$"
genau dann, wenn "$(p \neq q) \vee (q \notin D)$".

d) *"$(p,p) \in \mathsf{id}$" genau dann, wenn "p_id_p"*
genau dann, wenn "p Menge".

e) *"$(p,p) \notin \mathsf{id}$" genau dann, wenn "$\neg(p\_\mathsf{id}\_p)$"*
genau dann, wenn "p Unmenge".

f) *"$(p,q) \notin \mathsf{id}$" genau dann, wenn "$\neg(p\_\mathsf{id}\_q)$"*
genau dann, wenn "$(p \neq q) \vee (p$ Unmenge$)$"
genau dann, wenn "$(p \neq q) \vee (q$ Unmenge$)$".

Beweis **364-12** a) $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich $(p,p) \in \mathsf{id}_D$.

Aus VS gleich "$(p,p) \in \mathsf{id}_D$"
folgt: $p\_\mathsf{id}_D\_p$.

a) $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ VS gleich $p\_\mathsf{id}_D\_p$.

1: Aus VS gleich "$p\_\mathsf{id}_D\_p$"
folgt: $(p,p) \in \mathsf{id}_D$.

2: Aus 1"$(p,p) \in \mathsf{id}_D$"
folgt via **20-10**: $p \in D$.

a) $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $p \in D$.

Aus VS gleich "$p \in D$"
folgt via **20-9**: $(p,p) \in \mathsf{id}_D$.

Beweis **364-12** `b)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $((p,p) \in \mathsf{id}_D) \Leftrightarrow (p \_\mathsf{id}_D\_ p) \Leftrightarrow (p \in D)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((p,p) \notin \mathsf{id}_D) \Leftrightarrow (\neg(p \_\mathsf{id}_D\_ p)) \Leftrightarrow (p \notin D)$.

`c)`

`1.1:` Via **30-3** gilt: $\boxed{(\neg(p \_\mathsf{id}_D\_ q)) \Leftrightarrow ((p,q) \notin \mathsf{id}_D)}$

`1.2:` Via **20-10** gilt: $((p,q) \in \mathsf{id}_D) \Leftrightarrow ((p = q) \wedge (p \in D)) \Leftrightarrow (p = q \in D)$.

`2:` Aus `1.2`
folgt: $\boxed{((p,q) \notin \mathsf{id}_D) \Leftrightarrow ((p \neq q) \vee (p \notin D)) \Leftrightarrow ((p \neq q) \vee (q \notin D))}$

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $((p,p) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}}) \Leftrightarrow (p \_\mathsf{id}_{\mathcal{U}}\_ p) \Leftrightarrow (p \in \mathcal{U})$.

`2:` Aus **20-7(Def)**“$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$” und
aus `1`
folgt: $((p,p) \in \mathsf{id}) \Leftrightarrow (p \_\mathsf{id}\_ p) \Leftrightarrow (p \in \mathcal{U})$.

`3:` Via **0-22** gilt: $(p \in \mathcal{U}) \Leftrightarrow (p$ Menge$)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $((p,p) \in \mathsf{id}) \Leftrightarrow (p \_\mathsf{id}\_ p) \Leftrightarrow (p$ Menge$)$.

`e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $((p,p) \in \mathsf{id}) \Leftrightarrow (p \_\mathsf{id}\_ p) \Leftrightarrow (p$ Menge$)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((p,p) \notin \mathsf{id}) \Leftrightarrow (\neg(p \_\mathsf{id}\_ p)) \Leftrightarrow (p$ Unmenge$)$.

<u>Beweis</u> **364-12** `f)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $((p,q)\notin \mathsf{id}_{\mathcal{U}})$
$\Leftrightarrow (\neg(p\,\_\mathsf{id}_{\mathcal{U}}\_\,q)) \Leftrightarrow ((p\neq q)\vee(p\notin\mathcal{U})) \Leftrightarrow ((p\neq q)\vee(q\notin\mathcal{U}))$.

`2:` Aus **20-7(Def)** "$\mathsf{id}=\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$" und
aus `1`
folgt:
$((p,q)\notin\mathsf{id}) \Leftrightarrow (\neg(p\,\_\mathsf{id}\_\,q)) \Leftrightarrow ((p\neq q)\vee(p\notin\mathcal{U})) \Leftrightarrow ((p\neq q)\vee(q\notin\mathcal{U}))$.

`3.1:` Via **0-23** gilt: $(p\notin\mathcal{U}) \Leftrightarrow (p$ Unmenge$)$.

`3.2:` Via **0-23** gilt: $(q\notin\mathcal{U}) \Leftrightarrow (q$ Unmenge$)$.

`4:` Aus `2`,
aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $((p,q)\notin\mathsf{id})$
$\Leftrightarrow (\neg(p\,\_\mathsf{id}\_\,q)) \Leftrightarrow ((p\neq q)\vee(p$ Unmenge$)) \Leftrightarrow ((p\neq q)\vee(q$ Unmenge$))$.

□

364-13. Zu guter Letzt soll noch $x.\mathsf{id}.y$ auf E thematisiert werden.

364-13(Satz)

a) *"$x.\mathsf{id}.y$ auf E" genau dann, wenn "$x. = .y$ auf E".*

b) *"$\neg(x.\mathsf{id}.y$ auf $E)$" genau dann, wenn "$\neg(x. = .y$ auf $E)$".*

c) *"$\neg(x.\mathsf{id}.y)$ auf E" genau dann, wenn "$x. \neq .y$ auf E".*

d) *"$\neg(\neg(x.\mathsf{id}.y)$ auf $E)$" genau dann, wenn "$\neg(x. \neq .y$ auf $E)$".*

Beweis **364-13** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x.\mathsf{id}.y$ auf E.

1.1: Aus VS gleich "$x.\mathsf{id}.y$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

Thema1.2 $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

2: Aus VS gleich "$x.\mathsf{id}.y$ auf E" und
aus Thema1.2 "$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$"
folgt via **361-23**: β_id_γ.

3: Aus 2
folgt: $(\beta, \gamma) \in \mathsf{id}$.

4: Aus 3 "$(\beta, \gamma) \in \mathsf{id}$"
folgt via **364-5**: $\beta = \gamma$.

Ergo Thema1.2:

A1 | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

2: Aus 1.1 "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. = .y$ auf E.

<u>Beweis **364-13**</u> a) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $x. = .y$ auf E.

1.1: Aus VS gleich "$x. = .y$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

2: Aus VS gleich "$x. = .y$ auf E" und
aus Thema1.2"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$"
folgt via **228-1(Def)**: $\beta = \gamma$.

3: Aus Thema1.2"$\ldots (\alpha, \gamma) \in y$"
folgt via **folk**: γ Menge.

4: Aus 2"$\beta = \gamma$" und
aus 3"γ Menge"
folgt via **364-5**: $(\beta, \gamma) \in \mathsf{id}$.

5: Aus 4
folgt: β_id_γ.

Ergo Thema1.2:

A1	"$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta\_\mathsf{id}\_\gamma)$"

2: Aus 1.1"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta\_\mathsf{id}\_\gamma)$"
folgt via **361-23**: $x.\mathsf{id}.y$ auf E.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $(x.\mathsf{id}.y$ auf $E) \Leftrightarrow (x. = .y$ auf $E)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x.\mathsf{id}.y$ auf $E)) \Leftrightarrow (\neg(x. = .y$ auf $E))$.

<u>Beweis **364-13**</u> `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\neg(x.\mathsf{id}.y)$ auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{id}.y)$ auf E"
folgt via **361-12(Def)**: $E\subseteq(\mathsf{dom}\,x)\cap(\mathsf{dom}\,y)$.

> `Thema1.2` $(\alpha\in E)\wedge((\alpha,\beta)\in x)\wedge((\alpha,\gamma)\in y)$.
>
> `2:` Aus `VS` gleich "$\neg(x.\mathsf{id}.y)$ auf E" und
> aus `Thema1.2`"$(\alpha\in E)\wedge((\alpha,\beta)\in x)\wedge((\alpha,\gamma)\in y)$"
> folgt via **361-24**: $\neg(\beta\_\mathsf{id}\_\gamma)$.
>
> `3:` Aus 2"$\neg(\beta\_\mathsf{id}\_\gamma)$"
> folgt via **364-12**: $(\beta\neq\gamma)\vee(\beta$ Unmenge$)$.
>
> `4:` Aus `Thema1.2`"$\ldots(\alpha,\beta)\in x\ldots$"
> folgt via **folk**: β Menge.
>
> `5:` Aus 3 und
> aus 4
> folgt: $\beta\neq\gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha\in E)\wedge((\alpha,\beta)\in x)\wedge((\alpha,\gamma)\in y))\Rightarrow(\beta\neq\gamma)$"

`2:` Aus `1.1`"$E\subseteq(\mathsf{dom}\,x)\cap(\mathsf{dom}\,y)$" und
aus `A1` gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha\in E)\wedge((\alpha,\beta)\in x)\wedge((\alpha,\gamma)\in y))\Rightarrow(\beta\neq\gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x.\neq.y$ auf E.

Beweis **364-13** c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $x. \neq .y$ auf E.

1.1: Aus VS gleich "$x. \neq .y$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

Thema1.2 $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

2: Aus VS gleich "$x. \neq .y$ auf E" und
aus Thema1.2"$(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$"
folgt via **228-1(Def)**: $\beta \neq \gamma$.

3: Aus 2"$\beta \neq \gamma$"
folgt via **364-12**: $\neg(\beta \_\mathsf{id}\_ \gamma)$.

Ergo Thema1.2:

A1 | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\neg(\beta \_\mathsf{id}\_ \gamma))$"

2: Aus 1.1"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\neg(\beta \_\mathsf{id}\_ \gamma))$"
folgt via **361-24**: $\neg(x.\mathsf{id}.y)$ auf E.

d)

1: Via des bereits bewiesenen c) gilt: $(\neg(x.\mathsf{id}.y)$ auf $E) \Leftrightarrow (x. \neq .y$ auf $E)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(\neg(x.\mathsf{id}.y$ auf $E))) \Leftrightarrow (\neg(x. \neq .y$ auf $E))$.

□

- **H. Bauer**, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, De-Gruyter, 1978(3).
- **H. Brauner**, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **K.P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- **Wikipedia**. *http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt.* Datum: 14-01-09. Letzte Änderung: 13-12-12 06:46.