# О локально дефинизируемых матриц-функциях

Азизов Т.Я., Йонас П.

## Введение

Работа посвящена исследованию аналитических свойств специальных классов матрично-значных функций методами теории операторов.

Пусть $G$ — неванлинновская $n \times n$ матрично-значная функция, т.е. $G$ кусочно-голоморфна, задана на множестве $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, где символами $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ обозначено множество комплексных и вещественных чисел, соответственно, $G$ является $\mathbb{R}$-симметричной функцией: $G(\overline{\lambda}) = G(\lambda)^*$, и $(2i)^{-1}(G(\lambda) - G(\lambda)^*) \geq 0$ при всех $\lambda$ с $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Известно (см. [18]), что такая функция $G$ допускает представление

$$G(\lambda) = S + \Gamma^*\{\lambda + (1 + \lambda^2)(A - \lambda)^{-1}\}\Gamma, \tag{0.1}$$

где $A$ — самосопряженный оператор или самосопряженное линейное отношение в гильбертовом пространстве $\mathcal{K}$, $\Gamma$ — ограниченный оператор из $\mathbb{C}^n$ в $\mathcal{K}$ и $S$ — симметрическая $n \times n$ матрица; при этом представление (0.1) может быть выбрано минимальным, т.е.

$$\mathcal{K} = \overline{\operatorname{span}}\{(\lambda + (1 + \lambda^2)(A - \lambda)^{-1}\}\Gamma)x \mid x \in \mathbb{C}^n\}.$$

Другими словами: $G$ может быть записана как $Q$-функция соответствующая некоторому самосопряженному расширению симметрического линейного отношения (см. [13]). Минимальное представление определяет линейный оператор или линейное отношение $A$ с точностью до унитарной эквивалентности. С другой стороны, любая функция, допускающая представление (0.1) (даже без условия минимальности) является неванлинновской. Подобное представление допускают также обобщенные функции Неванлинны (см. [14], [5]) и дефинизируемые функции (см.

[9]). Как оказалось, при изучении функций упомянутых классов ключевую роль играют спектральные свойства соответствующих линейных операторов или линейных отношений. В то же время, теория этих функциональных классов находит важные приложения в спектральной теории операторов.

Основным объектом изучения в нашей работы являются локально обобщенные функции Неванлинны и локально дефинизируемые функции со значениями во множестве $n \times n$ матриц (см. ниже Определение 1.5). Для функций этих классов существует представление, аналогичное (0.1) (см. [11]), т.е., представление в виде $Q$-функции специального класса симметрических операторов в пространстве Крейна. Локально дефинизируемые операторы часто появляются при алгебраических операциях с дефинизируемыми и мероморфными функциями.

Целью этой работы является доказательство того, что функция $-(G(\lambda))^{-1}$ является локально дефинизируемой или локально обобщенной матрично-значной функцией Неванлинны, если $G(\lambda)$ принадлежит тому же классу. Следует отметить, что у этого результата нет бесконечномерного операторного аналога (см. ниже Пример 2.1). Доказательство основных результатов основано на представлениях изучаемых матриц-функций через самосопряженные линейные отношения в пространстве Крейна и на теории возмущений для таких отношений. Мы также исследуем глобальный вариант Теоремы 2.5: обратная к дефинизируемой матрично-значной функции является дефинизируемой. В этом случае доказаны специальные свойства дефинизируемости (Теорема 2.2).

В Разделе 3 основные результаты Раздела 2 применяются к исследованию граничной задачи для симметрического оператора в пространстве Крейна, в которой собственное значение играет также роль параметра в граничных условиях. Описаны некоторые спектральные свойства граничной задачи, а также построено такое самосопряженное в пространстве Крейна линейное отношение $B$, имеющее локальную спектральную функцию, что решение граничной задачи выражается через компрессию его резольвенты.

В Разделе 1 приведены необходимые определения и предварительные результаты, используемые при получении основных результатов в Разделах 2 и 3.

# 1 Некоторые классы оператор-функций

**1.1.** *Обозначения для мероморфных оператор-функций.* Пусть $\Omega$ — область в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, симметричная относительно вещественной оси $\mathbb{R}$ и такая, что $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ и пересечения $\Omega^+ = \Omega \cap \mathbb{C}^+$ и $\Omega^- = \Omega \cap \mathbb{C}^-$ с верхней и нижней полуплоскостями $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$ — односвязные множества. Мы не исключаем случаи $\Omega = \overline{\mathbb{C}}$ (или, что эквивалентно, $\overline{\mathbb{R}} \subset \Omega$) и $\Omega = \mathbb{C}$.

Всюду ниже $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ — сепарабельное пространство Крейна и $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — множество линейных непрерывных операторов, действующих в $\mathcal{H}$ (теорию пространств Крейна см., напр., в [1]). Пусть $S$ — $\mathbb{R}$-симметричное подмножество в $\overline{\mathbb{C}}$, а $f$ — скалярная функция и $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — операторнозначная функция, определенные на $S$. Положим $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$, $F^*(z) = F(\bar{z})^+$, $z \in S$, где "+" обозначает сопряжение в пространстве Крейна.

Через $M(\Omega \backslash \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L}$ обозначается множество всех $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-значных кусочно-мероморфных функций $F$, определенных на $\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}$, симметричных относительно $\mathbb{R}$, т.е. $F = F^*$.

Если $G \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$, будем обозначать через $\mathrm{P}(G; \Omega)$ объединение множества точек голоморфности $G$ в $\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}$ и множества всех $z \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ таких, что $G$ может быть аналитически продолжена в $z$ как из $\Omega^+$, так из $\Omega^-$, и эти аналитические продолжения совпадают. Для краткости обозначим $\mathrm{P}(G) := \mathrm{P}(G; \overline{\mathbb{C}})$, если $G \in M(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

Напомним определение знака открытых подмножеств $\Delta_0 \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ относительно $\mathbb{R}$-симметричной оператор-функции.

**Определение 1.1.** Пусть $G \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$. Открытое подмножество $\Delta_0$ множества $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ имеет *положительный тип относительно* $G$, если выполнены следующие условия:

(i) в $\Delta_0$ нет точек сгущения невещественных полюсов $G$;

(ii) для каждого $x \in \mathcal{H}$ и почти всех $u \in \Delta_0 \setminus \{\infty\}$,
$$\liminf_{v \downarrow 0} \ \mathrm{Im}\ [G(u + iv)x, x] \geq 0;$$

(iii) для каждого $x \in \mathcal{H}$ и каждого компактного в $\overline{\mathbb{R}}$ подмножества $\Delta_1 \subset \Delta_0$ существует окрестность $\mathcal{U}_1$ (в $\overline{\mathbb{C}}$) множества $\Delta_1$ такая, что
$$\inf \{\mathrm{Im}\ [G(u + iv)x, x] : \ u + iv \in \mathcal{U}_1 \cap \overline{\mathbb{C}}^{\,+}\} > -\infty.$$

Открытое подмножество $\Delta_0$ множества $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ имеет *отрицательный тип относительно* $G$, если оно положительного типа относительно $-G$. Будем говорить, что $\Delta_0$ имеет *дефинитный тип*, если оно положительного или отрицательного типа.

Эквивалентное описание множеств дефинитного типа см. в [10, Lemma 3.8].

**1.2.** *Предварительные сведения об обобщенных неванлинновских и дефинизируемых оператор-функциях.* Функция $G \in M(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ по определению — $N_\kappa$-функция с неотрицательным целым $\kappa$, если ядро $(z-\bar{\zeta})^{-1}(G(z) - G(\zeta)^+)$ имеет точно $\kappa$ отрицательных квадратов (см., напр., [16]), и в этом случае будем писать $G \in N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Положим $N(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = \bigcup_{\kappa=0}^{\infty} N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Функция из $N(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ называется $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-значной *обобщенной функцией Неванлинны.*

Каждая обобщенная функция Неванлинны является дефинизируемой ([8, Proposition 2.5]) в следующем смысле.

deffunc **Определение 1.2.** Функция $G \in M(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ называется *дефинизируемой*, если существует скалярная рациональная функция $r$ такая, что $rG$ есть сумма функции Неванлинны $N$ и $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-значной рациональной функции $Q$, полюсы которой принадлежат $\mathrm{P}(G)$:

$$r(z)G(z) = N(z) + Q(z) \tag{1.1}$$ rGNp

для всех точек $z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$ голоморфности функций $N$ и $Q$; здесь по определению рациональная оператор-функция — мероморфная оператор-функция в $\overline{\mathbb{C}}$. Функция $r$ с вышеупомянутыми свойствами называется *дефинизирующей* функцией для $G$.

Подмножество в $M(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ всех дефинизируемых функций будем обозначать через $D(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

Для каждой дефинизируемой оператор-функции существует симметричная дефинизирующая функция $r$: $r = r^*$ (см. [9, замечание после Definition 1.1]). Далее мы приведем простые результаты о дефинизируемых оператор-функциях, необходимые в дальнейшем.

transdef **Лемма 1.3.** (1) *Если $G \in D(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ и $z_0 \in \mathrm{P}(G)$, то для $G$ существует дефинизирующая симметрическая функция $r = r^*$, имеющая полюсы разве что в $z_0$ и $\bar{z}_0$.*

(2) *Если* $G \in D(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ *и* $r = r^*$ *— дефинизирующая функция для* $G$ *и все полюсы функции* $r$ *принадлежат* $\mathrm{P}(G)$*, то существует разложение* (1.1) *функции* $rG$ *со свойствами упомянутыми в Определении* 1.2*, такое что дополнительно* $\mathrm{P}(G) \subset \mathrm{P}(N)$*, каждый полюс* $\lambda$ *функции* $Q$ *— полюс для* $r$*, и порядок полюса* $\lambda$ *функции* $r$ *не меньше порядка полюса* $\lambda$ *для* $Q$*.*

*Доказательство.* Утверждение (1) доказано в [9, Lemma 1.2]. Пусть выполнены условия (2) и пусть $rG = \tilde{N} + \tilde{Q}$ — разложение $rG$ со свойствами, упомянутыми в Определении 1.2.

Множество $\tilde{s} := \overline{\mathbb{R}} \cap (\mathrm{P}(G) \setminus \mathrm{P}(\tilde{N}))$ конечно. В самом деле, если некоторая точка из $\tilde{s}$ не является полюсом для $r$, то она — полюс $\tilde{Q}$. Поэтому $\tilde{s}$ содержится в объединении множеств полюсов функций $r$ и $\tilde{Q}$. Точки из $\tilde{s}$ — изолированные точки во множестве $\overline{\mathbb{R}} \setminus \mathrm{P}(\tilde{N})$. Отсюда, используя интегральное представление функций Неванлинны (см. (1.3) ниже), $\tilde{N}$ может быть записана в виде

$$\tilde{N} = N_{(\tilde{s})} + Q_{\tilde{s}},$$

где $N_{(\tilde{s})}$ и $Q_{\tilde{s}}$ — функции Неванлинны,

$$\mathrm{P}(N_{(\tilde{s})}) = \mathrm{P}(\tilde{N}) \cup \tilde{s}$$

и $Q_{\tilde{s}}$ — рациональная оператор-функция с полюсами только в $\tilde{s}$.

Положив $N := N_{(\tilde{s})}$, $Q := \tilde{Q} + Q_{\tilde{s}}$, имеем $rG = N + Q$ и

$$\overline{\mathbb{R}} \cap \mathrm{P}(G) \subset \mathrm{P}(N).$$

Точка $\lambda \in \overline{\mathbb{R}} \cap \mathrm{P}(G)$ — полюс функции $rG$ тогда и только тогда, когда $\lambda$ — полюс для $Q$. Поскольку последнее выполнено и для $\lambda \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cap \mathrm{P}(G)$, утверждение (2) доказано. □

Дефинизируемые функции могут быть охарактеризованы своим поведением вблизи вещественной оси.

locchardef **Предложение 1.4 (см. [8], [9]).** *Функция* $G \in M(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ *дефинизируема тогда и только тогда, когда она имеет не более конечного числа невещественных полюсов и выполнены следующие условия:*

(i) *существует постоянные* $m \geq 1$ *и* $M > 0$ *такие, что*

$$\|G(z)\| \leq M(1 + |z|)^{2m} |\mathrm{Im}\ z|^{-m}$$

*для всех* $z$ *из некоторой окрестности* $\overline{\mathbb{R}}$ *в* $\overline{\mathbb{C}}$*.*

(ii) *существует конечное множество* $e \subset \overline{\mathbb{R}}$ *такое, что каждая связная компонента множества* $\overline{\mathbb{R}} \setminus e$ *имеет дефинитный тип относительно* $G$.

**1.3.** *Локально дефинизируемые оператор-функции.* Основной объект этой статьи — мероморфные в $\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}$ функции, локально обладающие некоторыми свойствами обобщенных функций Неванлинны и дефинизируемых функций.

locdeffunc **Определение 1.5.** Функция $G \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$ называется *локально дефинизируемой в* $\Omega$, если для каждой области $\Omega'$ со свойством $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, она может быть записана как сумма двух функций $G_0, G_{(0)} \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$:

$$G = G_0 + G_{(0)},$$

где $G_0$ — дефинизируемая функция, точнее, сужение дефинизируемой функции на $\Omega$, а $G_{(0)}$ голоморфна в $\Omega'$.

Класс оператор-функций локально дефинизируемых в $\Omega$ обозначим через $D(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

Если выше выражение "$G_0$ — дефинизируемая оператор-функция" заменим требованием принадлежности $G_0$ классу $N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ при некотором $\kappa \geq 0$ (возможно, зависящем от $\Omega'$), будем говорить что $G$ принадлежит классу $N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ локально обобщенных функций Неванлинны.

Далее будем обозначать $D(\overline{\mathbb{C}}, \mathcal{L}(\mathcal{H})) = D(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $N(\overline{\mathbb{C}}, \mathcal{L}(\mathcal{H})) = N(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, а если $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, то функции классов $M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$, $D(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $D(\mathcal{K}(\mathcal{H}))$, ..., будут обозначаться также символами $M^{n\times n}(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}})$, $D^{n\times n}(\Omega)$, $N^{n\times n}(\Omega)$, $N_\kappa^{n\times n}$, $D^{n\times n}$, ..., соответственно.

Из Определения 1.5 следует, что сумма двух функций из $N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ также принадлежит $N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

Ниже, в Предложении 1.6, мы дадим эквивалентное описание множества локально дефинизируемых функций (см. [11, Proposition 2.10]). Отметим, что необходимость условий $(i)$–$(iii)$ немедленно вытекает из Предложения 1.4.

locdef **Предложение 1.6 ([11]).** *Функция* $G \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$ *локально дефинизируема в* $\Omega$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$(i)$ *в* $\Omega \cap \overline{\mathbb{C}}$ *не существует точек сгущения невещественных полюсов функции* $G$*;*

*(ii) для каждого замкнутого подмножества $\Delta \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ существует такая его окрестность $\mathcal{U} \subset \overline{\mathbb{C}}$ и постоянные $m \geq 1$ и $M > 0$, что*

$$\|G(z)\| \leq M(1+|z|)^{2m}|\mathrm{Im}\,|^{-m}, \quad z \in \mathcal{U} \setminus \overline{\mathbb{R}};$$

*(iii) для каждой точки $\lambda \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ существует такая связная окрестность $I_\lambda \subset \overline{\mathbb{R}}$, что обе компоненты множества $I_\lambda \setminus \{\lambda\}$ имеют дефинитный тип относительно $G$.*

Если $\mathcal{H}$ — конечномерное пространство, то класс локально обобщенных функций Неванлинны можно охарактеризовать следующим образом.

ND **Предложение 1.7.** *Пусть $G \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$.*

(1) *Если $G \in N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, то условия (i)–(iii) Предложения 1.6 выполнены с заменой выражения "дефинитного типа" на выражение "положительного типа" в условии (iii).*

(2) *Если $\dim \mathcal{H} < \infty$ и $G$ удовлетворяет условиям (i)–(iii) Предложения 1.6 с заменой выражения "дефинитного типа" на выражение "положительного типа", то $G \in N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.*

*Доказательство.* (1) Пусть $G \in N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Поскольку каждая обобщенная функция Неванлинны дефинизируема (см. [8, Proposition 2.5]), то $G \in D(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ и условия (i)–(iii) Предложения 1.6 выполнены. Пусть $\lambda \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$. По Определению 1.5 можно записать $G$ в виде $G = G_0 + G_{(0)}$, где $G_0 \in N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ с некоторым $\kappa$ и функция $G_{(0)}$ голоморфна в некоторой окрестности в $\overline{\mathbb{C}}$ точки $\lambda$. Допустим существование такой последовательности $\{\lambda_n\} \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda_n \neq \lambda$, $\lambda_n \to \lambda$, что $\lambda_n$ не имеет окрестностей положительного типа относительно $G$. Тогда это же верно, если мы заменим $G$ на $G_0$. Последнее противоречит включению $G_0 \in N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ (см. [11, Section 2.4].

(2) Пусть $G \in D(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ и условие (iii) Предложения 1.6 выполнено с заменой выражения "дефинитного типа" на выражение "положительного типа". Пусть $\Omega'$ — $\mathbb{R}$-симметричная область в $\overline{\mathbb{C}}$ с теми же свойствами, что и $\Omega$ и $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Пусть $\Delta_0$ — объединение конечного числа связных открытых подмножеств множества $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ такое, что $\overline{\Omega' \cap \overline{\mathbb{R}}} \subset \Delta_0$ и каждая граничная точка $t_0$ связной компоненты в $\Delta_0$ приналежит некоторому

интервалу положительного типа относительно $G$ и точка $t_0$ либо является предельной для точек неголоморфности функции $G$ в $\Delta_0$, либо $t_0$ — точка голоморфности функции $G$. Согласно [11, Proposition 2.11] существует разложение

$$G = G_1 + G_2 + G_3,$$

со следующими свойствами:

$(a)$ $G_1 \in D(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $G_1$ голоморфна на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta_0}$, все граничные точки компонент множества $\Delta_0$ принадлежат интервалам положительного типа относительно $G_1$;

$(b)$ $G_2 \in M(\overline{\mathbb{C}}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ и $G_2$ локально голоморфна на $(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega') \cup \overline{\mathbb{R}}$.

$(c)$ $G_3$ является $\mathbb{R}$-симметричной $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-значной локально голоморфной на $(\Omega' \setminus \overline{\mathbb{R}}) \cup \Delta_0$ функцией.

Поэтому для каждой точки $\lambda \in \Delta_0$ существует такая окрестность $I_\lambda$ в $\overline{\mathbb{R}}$, что множество $I_\lambda \setminus \{\lambda\}$ имеет положительный тип относительно $G_1$. Согласно [8, Corollary 2.6], $G_1$ — обобщенная функция Неванлинны. Так как $G_2$ — рациональная матрично-значная функция, то и она является обобщенной функцией Неванлинны. Обозначив: $G_0 := G_1 + G_2$, $G_{(0)} := G_3$, и воспользовавшись Определением 1.5 применительно к $\Omega'$, $G_0$ и $G_{(0)}$, получаем $G \in N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

$\square$

Нижеследующая теорема понадобится нам в разделе 2.

`translocdef` **Теорема 1.8.** *Пусть $\mathcal{H}_1$ — еще одно, кроме $\mathcal{H}$, сепарабельное пространство Крейна. Пусть $G_1 \in D(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}_1))$, $q = q^*$, $K$ и $C = C^*$ — мероморфные функции в $\Omega$ со значениями в $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ и $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, соответственно.*

*Тогда:*

(1) *функция $G$, определенная формулой*

$$G(z) := q(z) K(\bar{z})^+ G_1(z) K(z) + C(z)$$

*для всех точек $z \in \Omega \setminus \mathbb{R}$ голоморфности $q$, $K$, $G_1$ и $C$, является локально дефинизируемой в $\Omega$;*

(2) *существует подмножество $e \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ со свойствами:* $(a)$ *$e$ не имеет точек сгущения в $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$;* $(b)$ *$e$ содержит все расположенные в $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ полюсы и нули функции $q$ и все полюсы функций $K$, $C$;* $(c)$ *все*

*связные компоненты множества $(\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}) \setminus e$ имеют дефинитный тип относительно $G_1$ и $G$. Если значение фунцкции $q$ положительно на связной компоненте $\delta \subset (\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}) \setminus e$, то знаки типов множества $\delta$ относительно $G_1$ и $G$ совпадает, а если значение $q$ отрицательно, то знаки типов $\delta$ относительно $G_1$ и $G$ противоположны.*

*Доказательство.* Сперва заметим, что $G \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$ и $G$ удовлетворяет условиям $(i)$, $(ii)$ Предложения 1.6. Для доказательства теоремы достаточно проверить утверждение, аналогичное (2), заменив $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ на произвольное связное открытое множество $\Delta_1$ такое, что $\overline{\Delta_1} \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$.

Пусть $\Omega' \supset \Delta_1$ — область в $\overline{\mathbb{C}}$ такая, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Тогда функция $G_1$ может быть записана в виде:

$$G_1 = G_0 + G_{(0)},$$

где $G_0, G_{(0)} \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L}(\mathcal{H}_1))$, $G_0$ дефинизируема, а $G_{(0)}$ голоморфна в $\Omega'$. Пусть

$$rG_0 = N + Q,$$

где $r$, $N$ и $Q$ как в (1.1) и $r$ и $Q$ не имеют невещественных полюсов (см. Лемму 1.3). Тогда

$$\begin{aligned} G(z) = & q(z) r(z)^{-1} K(\bar{z})^{+} N(z) K(z) \\ & + q(z) r(z)^{-1} K(\bar{z})^{+} Q(z) K(z) \\ & + C(z) \end{aligned} \tag{1.2}$$

для всех $z \in \Omega'$ из пересечения областей голоморфности функций $q$, $r^{-1}$, $K$, $K^{+}$ и $C$.

Пусть $e$ — объединение множеств всех полюсов функций $q$, $K$, $C$, и нулей функции $r$, расположенных в $\Delta_1$. Пусть $t_0 \in \Delta_1 \setminus (e \cup \{\infty\})$. Функция $G_1$ положительного типа (отрицательного типа) на связной компоненте множества $\Delta_1 \setminus (e \cup \{\infty\})$, содержащей $t_0$, если $r(t_0) > 0$ ($r(t_0) < 0$, соответственно); см. [9, Section 3.1]. Теорема будет доказана, если показать, что некоторая окрестность $t_0$ имеет положительный (отрицательный) тип относительно функции $G$, если $q(t_0) r(t_0)^{-1} > 0$ ($q(t_0) r(t_0)^{-1} < 0$), соответственно.

Будем предполагать $q(t_0) r(t_0)^{-1} > 0$; случай $q(t_0) r(t_0)^{-1} < 0$ рассматривается аналогично. Сумма второго и третьего слагаемых в правой части (1.2) голоморфна в окрестности точки $t_0$. Воспользуемся известным (см.[19]) интегральным представлением операторной функции Неванлинны:

$$N(z) = A + Bz + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t2} \right) d\,\Sigma(t), \tag{1.3}$$ n1

где $A,\ B$ — ограниченные самосопряженные операторы, причем $B \geq 0$, а монотонно неубывающая оператор-функция $\Sigma$ такова, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+t2)^{-1}\, d\,[\Sigma(t)x, x] < \infty$ для каждого $x \in \mathcal{H}_1$. Отсюда следует существование такого ограниченного интервала $(\alpha, \beta) \subset \Delta_1 \setminus (e \cup \{\infty\})$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и неванлинновской функции $H$:

$$H(z) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (t-z)^{-1}\, d\,\Sigma(t), \tag{1.4}$$ n

что функция $N - H$ голоморфна в некоторой окрестности (в $\mathbb{C}$) интервала $(\alpha, \beta)$. Отметим, что здесь $\Sigma$ — такая оператор-функция со значениями во множестве ограниченных самосопряженных операторов в $(\mathcal{H}_1, [\cdot, \cdot])$, что для $\alpha \leq t_1 \leq t_2 \leq \beta$ и всех $x \in \mathcal{H}_1$ имеет место неравенство $[\Sigma(t_1)x, x] \leq [\Sigma(t_2)x, x]$, т.е., $(J_1\Sigma(t_1)x, x)_1 \leq (J_1\Sigma(t_2)x, x)_1$, где $J_1$ — фундаментальная симметрия пространства $(\mathcal{H}_1, [\cdot, \cdot])$ и $(\cdot, \cdot)_1 := [J_1 \cdot, \cdot]$.

Заметим, что в $[\alpha, \beta]$ существует такое не более, чем счетное подмножество $\omega$, что все функции $t \longmapsto (J_1\Sigma(t)x, x)_1$, $x \in \mathcal{H}_1$, непрерывны на $[\alpha, \beta] \setminus \omega$. В самом деле, если предположить противное, то оператор умножения на независимую переменную в гильбертовом пространстве $L_2([\alpha, \beta], \mathcal{H}_1, J_1\Sigma)$ классов эквивалентности $\mathcal{H}_1$-значных функций имел бы несчетную ортонормированную систему собственных векторов, что противоречит сепарабельности пространства $L_2([\alpha, \beta], \mathcal{H}_1, J_1\Sigma)$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить, что для каждого $\varepsilon > 0$ интервал $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ с $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset (\alpha, \beta)$ имеет положительный тип относительно $q_0 K^* H K$, если функция $q_0 : z \longmapsto q(z) r(z)^{-1}$ положительна на интервале $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Покажем, что для каждого $x \in \mathcal{H}$ и некоторого достаточно малого $v_0 > 0$,

$$\begin{gathered} \inf \{ \mathrm{Im}\ (q_0(u+iv)[K(u-iv)^+ H(u+iv) K(u+iv)x, x]) : \\ u \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],\ 0 < v < v_0 \} > -\infty. \end{gathered} \tag{1.5}$$ inf

Поскольку

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Im}\ & q_0(u+iv)[K(u-iv)^+H(u+iv)K(u+iv)x,x] = \\ & -i(q_0(u+iv)-q_0(u-iv))[K(u-iv)^+H(u+iv)K(u+iv)x,x] \\ & -iq_0(u-iv)[(K(u-iv)^+-K(u+iv)^+)H(u+iv)K(u+iv)x,x] \\ & -iq_0(u-iv)[K(u+iv)^+(H(u+iv)-H(u-iv))K(u+iv)x,x] \\ & -iq_0(u-iv)[K(u+iv)^+H(u-iv))(K(u+iv)-K(u-iv))x,x], \end{aligned} \tag{1.6}$$

$\boxed{\texttt{Im}}$

то из неравенства

$$\inf\,\{\|H(u+iv)\||v|:\ u\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\}<\infty$$

и аналитичности $q_0$ и $K$ на $[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]$, следует, что первый, второй и четвертый члены в правой части (1.6) ограничены на $\{u+iv:\ u\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon],\ v\in(0,v_0)\}$ при некотором $v_0$
»0.

$$\begin{aligned} & 2q_0(u)\mathrm{Im}\ [H(u+iv)K(u+iv)x,K(u+iv)x] \\ & -i(q_0(u-iv)-q_0(u))[K(u+iv)^+(H(u+iv)-H(u-iv))K(u+iv)x,x]. \end{aligned}$$

Первый член этого выражения неотрицателен и второй неотрицателен на указанном выше множестве точек $u+iv$. Это доказывает (1.5).

Проверим что для $u\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\setminus\omega$

$$\liminf_{v\downarrow 0}\ \mathrm{Im}\ (q_0(u+iv)[K(u-iv)^+H(u+iv)K(u+iv)x,x])\geq 0. \tag{1.7}$$

$\boxed{\texttt{liminf}}$

Ниже мы пользуемся тем, что для каждого $u\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\setminus\omega$ все функции $t\longmapsto[\Sigma(t)x,y]$ непрерывны в $u$. Поэтому

$$\lim_{v\downarrow 0}\ v[H(u+iv)x,y]=0.$$

Перепишем первый член справа в формуле (1.6) в виде

$$\begin{aligned} & -i(q_0(u+iv)-q_0(u-iv))\times \\ & \quad [H(u+iv)((K(u+iv)-K(u))+K(u))x,((K(u-iv)-K(u))+K(u))x]. \end{aligned}$$

Предел этого выражения при $v\downarrow 0$ равен нулю. Предел второго члена справа в формуле (1.6) при $v\downarrow 0$ совпадает с пределом при $v\downarrow 0$ выражения

$$-iq_0(u-iv)[H(u-iv)((K(u+iv)-K(u))+K(u))x,-2ivK'(u)x];$$

и поэтому тоже равен нулю. Аналогично и с четвертым членом. Так как

$$
\begin{aligned}
-i[K(u+iv)^{+}(H(u+iv)-H(u-iv))K(u+iv)x,x]& \\
= 2\operatorname{Im}[H(u+iv)K(u+iv)x,K(u+iv)x] &\geq 0,
\end{aligned}
$$

то нижний предел третьего члена справа в формуле (1.6) неотрицателен и $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ имеет положительный тип относительно $q_0K^*HK$. $\square$

# 2 Обратные к локально дефинизируемым матриц-функциям

Из определения класса $N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ следует, что $G\in N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ влечет $-G^{-1}\in N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $\kappa=0,1,\ldots$. Следующий пример показывает, что эта импликация не верна, если $N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ заменить либо на класс дефинизируемых функций $D(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, либо на класс локально обобщенных неванлинновских функций $N(\Omega,\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ при $\Omega\neq\overline{\mathbb{C}}$.

ex1 **Пример 2.1.** Пусть $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$ — бесконечномерное гильбертово пространство, а $A$ и $B$ — ограниченные самосопряженные операторы, действующие в нем. Тогда оператор-функция $F(z):=zA+B$ является $\mathbb{R}$-симметрической и голоморфной в $\mathbb{C}$, а потому принадлежит $N(\mathbb{C},\mathcal{L}(\mathcal{H}))$. В то же время функция $F(z)$ является дефинизируемой: в качестве дефинизирующей может быть взята, например, функция $z\longmapsto z(1+z2)^{-1}$. Выберем $A=P_+-P_-$, где $P_+$ и $P_-$ — взаимно дополняющие самосопряженные проекторы в $\mathcal{H}$: $P_++P_-=1$ такие, что $\dim P_\pm\mathcal{H}=\infty$, а $B=B_+\oplus B_-$, где $B_+$ и $B_-$ — самосопряженные операторы в $P_+\mathcal{H}$ и $P_-\mathcal{H}$, соответственно, со спектрами $\sigma(-B_+)=\sigma(B_-)=\{n^{-1}:\, n=1,2,\ldots\}\cup\{0\}$.

Тогда $-F(z)^{-1}=-(z+(P_+-P_-)(B_+\oplus B_-))^{-1}(P_+-P_-)$ — ортогональная сумма функции Неванлинны $z\longmapsto -(B_++z)^{-1}$ и функции $z\longmapsto -(B_--z)^{-1}$, отрицание которой есть функция Неванлинны, и обе эти функции имеют полюсы в точках $n^{-1}$, $n=1,2,\ldots$. Следовательно, $-F^{-1}$ не принадлежит $D(\mathbb{C},\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ и потому она не является дефинизируемой, и не принадлежит $N(\mathbb{C},\mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

Ниже в этом разделе мы покажем, что для случая конечномерного $\mathcal{H}$, функция $-G^{-1}$ дефинизируема, локально дефинизируема или является локально обобщенной функцией Неванлинны одновременно с $G$.

def **Теорема 2.2.** *Пусть* $G \in D^{n\times n}$ *и* $\det G(z) \not\equiv 0$. *Тогда* $-G^{-1} \in D^{n\times n}$. *Более того, если* $z_0 \in \mathrm{P}(G) \cap \mathrm{P}(G^{-1})$ *и* $r = r^*$ *— дефинизирующая для* $G$ *рациональная функция степени* $m$, *имеющая полюсы только в* $z_0$ *и* $\bar{z}_0$, *то*

$$r^{-1}(-G^{-1}) \in N_{\kappa_1}^{n\times n}, \quad \text{где} \quad \kappa_1 \le \begin{cases} mn/2, & \textit{если } z_0 \ne \bar{z}_0, \\ mn, & \textit{если } z_0 = \bar{z}_0, \end{cases} \tag{2.1}$$ kappa1

$$r(-G^{-1}) \in N_{\kappa_2}^{n\times n}, \quad \text{где} \quad \kappa_2 \le \begin{cases} mn, & \textit{если } z_0 \ne \bar{z}_0, \\ 2mn, & \textit{если } z_0 = \bar{z}_0, \end{cases} \tag{2.2}$$ kappa2

*и существует дефинизирующая для* $-G^{-1}$ *рациональная функция вида* $gr^{-1}$, *где* $g = g^*$ *— неотрицательная на* $\overline{\mathbb{R}}$ *рациональная функция степени не более* $\kappa_1$.

*Доказательство.* Пусть $z_0$ и $r$ такие, как во второй части теоремы. Существование такой дефинизирующей функции $r$ следует из Леммы 1.3, (1). По Лемме 1.3, (2), существует разложение $rG = N + Q$ такое, что $N \in N_0^{n\times n}$, $\mathrm{P}(G) \subset \mathrm{P}(N)$, $Q$ имеет полюсы разве что в точках $z_0$ и $\bar{z}_0$ и порядки этих полюсов для $Q$ не выше, чем для $r$.

Если $z_0 \ne \bar{z}_0$, кратность полюса $z_0$ для $Q$ не выше $\frac{1}{2}mn$ и потому $Q \in N_{\kappa_1}^{n\times n}$ с $\kappa_1 \le \frac{1}{2}mn$ (см. [9, Lemma 3.4]). Если $z_0 = \bar{z}_0$, то $Q \in N_{\kappa_1}^{n\times n}$ с $\kappa_1 \le mn$ (см. [9, Proposition 3.5]). В обоих случаях $N + Q = rG \in N_{\kappa_1}^{n\times n}$ и, следовательно, имеет место (2.1).

Поскольку $z_0$ и $\bar{z}_0$ — точки голоморфности для $r^{-1}(-G^{-1})$, то (см. [8, Доказательство Proposition 2.5, (3)]) получаем существование рациональной дефинизирующей функции $g$ для $r^{-1}(-G^{-1})$ степени $\kappa_1$ и такой, что $g$ неотрицательно на $\overline{\mathbb{R}}$, $g$ имеет полюсы разве что в точках $z_0$ и $\bar{z}_0$ и, по Лемме 1.3, (2), существует разложение

$$gr^{-1}(-G^{-1}) = \tilde{N} + \tilde{Q},$$

где $\tilde{N} \in N_0^{n\times n}$ и рациональная матрично-значная функция $\tilde{Q} = \tilde{Q}^*$ имеет полюсы разве что в $z_0$ и $\bar{z}_0$. Поскольку $z_0$, $\bar{z}_0 \in \mathrm{P}(-G^{-1})$, то $gr^{-1}$ — дефинизирующая функция для $-G^{-1}$. Это доказывает первое и последнее утверждения теоремы.

Из условий $z_0$, $\bar{z}_0 \in \mathrm{P}(-G^{-1})$ и разложения функции $r2(r^{-1}(-G^{-1})) = r(-G^{-1})$ в сумму $F_1 + F_2$, где функции $F_1$ — голоморфная вблизи $\{z_0, \bar{z}_0\}$ и $F_2$ — голоморфная вне некоторой окрестности точек $\{z_0, \bar{z}_0\}$, следует, что $r(-G^{-1}) \in N_{\kappa_1+\frac{1}{2}mn}^{n\times n}$, если $z_0 \ne \bar{z}_0$ и $r(-G^{-1}) \in N_{\kappa_1+mn}^{n\times n}$, если $z_0 = \bar{z}_0$. Это доказывает (2.2). □

newmain **Теорема 2.3.** *Если* $G \in N^{n\times n}(\Omega)$ *и* $\det G(z) \not\equiv 0$ *на множестве голоморфности* $G$, *то* $-G^{-1} \in N^{n\times n}(\Omega)$.

*Доказательство.* 1. В случае $\Omega = \overline{\mathbb{C}}$ это утверждение известно (см. [15, Proposition 3.3]). Поэтому положим $\Omega \neq \overline{\mathbb{C}}$. В этом случае без ограничения общности можно (и будем) считать, что $\infty \notin \Omega$, $i \in \Omega$, точка $i$ не является полюсом функция $G$ и $\det G(i) \neq 0$: если это не так, то следует соответствующим образом преобразовать аргумент.

Достаточно доказать теорему в случае, когда дополнительно к $\det G(i) \neq 0$ также $\det G'(i) \neq 0$. В самом деле, предположим $\det G'(i) = 0$. Тогда функция $\widetilde{G} \in N^{n\times n}(\Omega)$: $\widetilde{G}(z) = (1 + z2)G(z)$ (см. Теорему 1.8, Предложение 1.7) удовлетворяет условию $\det\ \widetilde{G}'(i) = \det(2iG(i)) = (2i)^n \det G(i) \neq 0$. Если доказано включение $-\widetilde{G}^{-1} \in N^{n\times n}(\Omega)$, то из $-G(z)^{-1} = -(1 + z2)\widetilde{G}(z)^{-1}$ мы также имеем $-G^{-1} \in N^{n\times n}(\Omega)$.

2. Предположим $\det G'(i) \neq 0$. Пусть для каждого $j = 1, 2, 3$, область $\Omega_j$ является $\mathbb{R}$-симметричной и ограниченной в $\mathbb{C}$, причем область $\Omega_j \cap \mathbb{C}^{\pm}$ односвязна и $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$, $\overline{\Omega_2} \subset \Omega_1$, $\overline{\Omega_3} \subset \Omega_2$, $i \in \Omega_3$. Запишем $G$ как сумму $G = G_0 + G_{(0)}$, где $G_0 \in N_\kappa^{n\times n}$ при некотором $\kappa \geq 0$ и $G_{(0)}$ голоморфна в $\Omega_1$.

Существуют пространство Понтрягина $\mathcal{K}_0$ с $\kappa_-(\mathcal{K}_0) = \kappa < \infty$, самосопряженное линейное отношение $A_0$ в $\mathcal{K}_0$ с $\rho(A_0) = \mathrm{P}(G_0)$, оператор $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathcal{K}_0)$ и симметрический оператор $S_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ такие, что

$$Gamma_0(z) = S_0 + \Gamma_0^+\{z + (z2 + 1)(A_0 - z)^{-1}\}\Gamma_0, \quad z \in \rho(A_0),$$

(см. [5, Theorem 1.1]). Из [11, Theorem 2.7] следует существование пространства Крейна $\mathcal{K}_{(0)}$, самосопряженного линейного отношения $A_{(0)}$ в $\mathcal{K}_{(0)}$ с $\Omega_2 \subset \rho(A_{(0)})$, оператора $\Gamma_{(0)} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathcal{K}_{(0)})$ и симметрического оператора $S_{(0)} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ таких, что

$$G_{(0)}(z) = S_{(0)} + \Gamma_{(0)}^+\{z + (z2 + 1)(A_{(0)} - z)^{-1}\}\Gamma_{(0)}, \quad z \in \Omega_2.$$

Рассмотрим пространство Крейна $\mathcal{K} := \mathcal{K}_0 \times \mathcal{K}_{(0)}$, $\Gamma := (\Gamma_0 \quad \Gamma_{(0)})^{\mathrm{T}} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathcal{K})$, $S := S_0 + S_{(0)}$. Если $A$ — прямое произведение линейных отношений $A_0$ и $A_{(0)}$, то

$$G(z) = S + \Gamma^+\{z + (z2 + 1)(A - z)^{-1}\}\Gamma, \quad z \in \Omega_2 \cap \rho(A_0).$$

Из $\det G'(i) \neq 0$ имеем

$$\ker \Gamma = \{0\}. \tag{2.3}$$ kerG

Определим линейные отображения $\Gamma_z \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathcal{K})$, $z \in \rho(A)$, формулой

$$\Gamma_z := (1 + (z - i)(A - z)^{-1})\Gamma.$$

Непосредственно можно показать, что оператор-функция

$$z \longmapsto (A - z)^{-1} - \Gamma_z G(z)^{-1} \Gamma_{\bar{z}}^{+} \tag{2.4}$$ res

удовлетворяет резольвентному уравнению на $\{z \in \Omega_2 \cap \rho(A) :\ \det G(z) \neq 0\}$. Отсюда и поскольку функция (2.4) $\mathbb{R}$-симметрична следует существование самосопряженного линейного отношения $B$ в $\mathcal{K}$ такого, что

$$\{z \in \Omega_2 \cap \rho(A) :\ \det G(z) \neq 0\} \subset \rho(B)$$

и

$$(B - z)^{-1} = (A - z)^{-1} - \Gamma_z G(z)^{-1} \Gamma_{\bar{z}}^{+} \tag{2.5}$$ resB

для всех $z \in \Omega_2 \cap \rho(A)$ с $\det G(z) \neq 0$, в частности, для $z = i, -i$.

3. Пусть $P_0$ и $P_{(0)}$ — ортогональные проекторы в $\mathcal{K}$ с областями значения $\mathcal{K}_0 \times \{0\}$ и $\{0\} \times \mathcal{K}_{(0)}$, соответственно, и пусть $E_0$ — спектральная функция $A_0$. Тогда для каждого открытого подмножества $\Delta_0$ множества $\Omega_2 \cap \mathbb{R}$, являющимся объединением конечного числа открытых интервалов таких, что определен проектор $E_0(\Delta_0)$, разложение

$$\mathcal{K} = E\mathcal{K} + (1 - E)\mathcal{K} \quad \text{с} \quad E := E_0(\Delta_0) P_0$$

приводит линейное отношение $A$ и имеет место следующее:

($\alpha$) $E\mathcal{K}$ — понтрягинское подпространство в $\mathcal{K}$ с конечным рангом отрицательности,

($\beta$) $\sigma(A \cap (E\mathcal{K})2) \subset \sigma(A) \cap \overline{\Delta_0}$,

($\gamma$) $\sigma(A \cap ((1 - E)\mathcal{K})2) \subset \sigma(A) \setminus \Delta_0$.

По определению оператора $A$ имеем:

$$\sigma(A) \cap (\Omega_2 \setminus \mathbb{R}) \quad \text{— конечное множество} \tag{2.6}$$ sA1

и

$$\sigma(A) \cap (\Omega_2 \setminus \mathbb{R}) \subset \sigma_{p,\mathrm{norm}}(A); \tag{2.7}$$ sA2

здесь через $\sigma_{p,\mathrm{norm}}(\cdot)$ обозначено множество нормальных собственных значений (см. [6, § I.2]). Из [2, Theorem 2.4] следует существование такого открытого подмножества $\Delta_1$ множества $\Omega_2\cap\mathbb{R}$, являющегося объединением конечного числа открытых интервалов, что $\Omega_3\cap\mathbb{R}\subset\Delta_1$, $\overline{\Delta_1}\subset\Omega_2\cap\mathbb{R}$, и самосопряженного проектора $F$ в $\mathcal{K}$, порождающего разложение

$$\mathcal{K}=F\mathcal{K}+(1-F)\mathcal{K},$$

приводящее $B$ и обладающее свойствами $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, упомянутыми выше для $E$, $A$, $\Delta_0$, замененными на $F$, $B$, $\Delta_1$. В частности, в $\Delta_1$ нет точек сгущения невещественного спектра $B$. Отсюда, принимая во внимание (2.5)–(2.7) и хорошо известный результат теории компактных возмущений (см., например, [6, Лемма I.5.2]), получаем, что множество

$$\sigma':=(\overline{\Omega_3}\setminus\mathbb{R})\cap\sigma(B)$$

конечно и содержится в $\sigma_{p,\mathrm{norm}}(B)$. Поэтому соответствующий проектор Рисса-Данфорда $\hat{F}$, являющийся самосопряженным, имеет конечный ранг.

Поскольку $(F+\hat{F})\mathcal{K}$ — пространство Понтрягина с конечным рангом отрицательности, оператор-функция

$$\mathbb{C}\setminus(\overline{\Delta_1}\cup\sigma')\ni z\longmapsto(B-z)^{-1}(F+\hat{F})$$

принадлежит $N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{K}))$ при некотором $\kappa\geq 0$. Следовательно,

$$(z\longmapsto(B-z)^{-1})\in N(\Omega_3,\mathcal{L}(\mathcal{K})). \tag{2.8}$$ BlocN

Если $z\in(\Omega_3\setminus\mathbb{R})\cap\rho(A)\cap\rho(B)$, то (2.5) влечет следующее соотношение:

$$\begin{aligned}L(z):=&\left(1-(z-i)(A-i)^{-1}\right)(B-z)^{-1}\left(1-(z+i)(A+i)^{-1}\right)\\&+z(A-i)^{-1}(A+i)^{-1}-\frac{1}{2}\left((A-i)^{-1}+(A+i)^{-1}\right)=\\&=\left(1-(z-i)(A-i)^{-1}\right)\Gamma_z(-G(z)^{-1})\Gamma_{\bar z}^{+}\left(1-(z+i)(A+i)^{-1}\right)=\\&=\Gamma(-G(z)^{-1})\Gamma^{+}.\end{aligned} \tag{2.9}$$ resfor

Обозначим через $\Gamma'$ отображение $x\longmapsto\Gamma x$, рассматриваемое как оператор в $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\operatorname{ran}\Gamma)$. Пусть $P\in\mathcal{L}(\mathcal{K},\operatorname{ran}\Gamma)$ — такой оператор, что $Px=x$, $x\in\operatorname{ran}\Gamma$. Тогда $P\Gamma=\Gamma'$ и, учитывая (2.3), имеем

$$\begin{aligned}\Gamma'^{-1}PL(z)(\Gamma'^{-1}P)^{+}&=\Gamma'^{-1}P\Gamma(-G(z)^{-1})\Gamma^{+}(\Gamma'^{-1}P)^{+}\\&=-G(z)^{-1}.\end{aligned} \tag{2.10}$$ L

Соотношения (2.8), (2.9), (2.10), Предложение 1.7 и Теорема 1.8 влекут включение $-G^{-1} \in N^{n\times n}(\Omega_3)$. Поскольку $\Omega_3$ может быть выбрано так, что оно содержит произвольное заданное компактное подмножество из $\Omega$, то тем самым теорема доказана. $\square$

*Замечание* 2.4. Пусть $F$ — обобщенная неванлинновская функция, тогда $F^{-1}$ также является обобщенной неванлинновской функцией и обе они допускают представление (0.1). В работе [17, Proposition 2.1] приведена конструкция, позволяющая выразить эти представления одно через другое. Следует отметить, что это построение может быть распространено на более широкий класс оператор-функций и использовано при альтернативном доказательстве второй части Теоремы 2.3.

maindef **Теорема 2.5.** *Пусть* $G \in D^{n\times n}(\Omega)$ *и* $\det G(z) \not\equiv 0$ *на области голоморфности* $G$. *Тогда* $-G^{-1} \in D^{n\times n}(\Omega)$.

*Доказательство.* Для дефинизируемой функции $G$, т.е. $\Omega = \overline{\mathbb{C}}$, утверждение справедливо в силу Теоремы 2.2. Поэтому, как и при доказательстве Теоремы 2.3, мы полагаем $\infty \notin \Omega$.

Пусть $\Omega'$ — ограниченная $\mathbb{R}$-симметричная область в $\mathbb{C}$ такая, что открытые множества $\Omega' \cap \mathbb{C}^{\pm}$ односвязны и $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Запишем $G$ в виде $G = G_0 + G_{(0)}$, где $G_0$ — дефинизируемая функция и $G_{(0)}$ голоморфна в $\Omega'$. Пусть $g = g^*$ — дефинизирующая функция для $G_0$, т.е. $gG_0$ имеет вид $N + P$, где $N$ — функция Неванлинны и $P$ — рациональная матричная функция. Тогда $gG = N + P + G_{(0)} \in N^{n\times n}(\Omega')$ и по Теореме 2.3 имеем $-g^{-1}G^{-1} \in N^{n\times n}(\Omega')$. Так как $N^{n\times n}(\Omega') \subset D^{n\times n}(\Omega')$, из Теоремы 1.8 получаем $-G^{-1} \in D^{n\times n}(\Omega')$. Поскольку множество $\Omega'$ может быть выбрано так, чтобы оно содержало заданное компактное подмножество множества $\Omega$, то теорема доказана. $\square$

# 3 Приложение к абстрактной граничной задаче с собственным параметром в граничных условиях

Пусть $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot])$ — сепарабельное пространство Крейна и пусть $S$ — плотно заданный замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, допускающий самосопряженные расширения и $A'$ — одно из них. Предположим

$$\dim \mathcal{D}(A')/\mathcal{D}(S) =: n < \infty. \tag{3.1}$$ findef

Пусть $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ — граничная тройка для $S^+$ (см., например, [3]), т.е. $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство с $\dim \mathcal{H} = n$ и $\Gamma_0$, $\Gamma_1$ — линейные отображения $\mathcal{D}(S^+)$ в $\mathcal{H}$ такие, что $f \longmapsto \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} =: \Gamma f$ сюрьективно отображает $\mathcal{D}(S^+)$ на $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ и

$$[S^+ f, g] - [f, S^+ g] = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g), \quad f, g \in \mathcal{D}(S^+). \tag{3.2}$$

green

Предположим, что самосопряженное расширение $A_0 := S^+|\ker \Gamma_0$ оператора $S$ имеет непустое множество регулярных точек. Оператор $A_1 := S^+|\ker\ \Gamma_1$ — также самосопряженное расширение для $S$. Соотношение (3.2) влечет непрерывность $\Gamma_0$ и $\Gamma_1$ относительно топологии графика на $\mathcal{D}(S^+)$. Пусть $z \in \rho(A_0)$. Положим $\mathcal{N}_z := \ker(S^+ - z)$. Тогда $\Gamma_0$ отображает $\mathcal{N}_z$ биективно на $\mathcal{H}$. Пусть $\gamma(z)$ обозначает обратное отображение, рассматриваемое как оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathfrak{H}$, и пусть $Q$ — функция Вейля граничной тройки $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$:

$$Q(z) = \Gamma_1 \gamma(z). \tag{3.3}$$

QGaga

Тогда для $z_1$, $z_2 \in \rho(A_0)$ имеем

$$\gamma(z_2) = (1 + (z_2 - z_1)(A_0 - z_2)^{-1})\gamma(z_1)$$

и

$$Q(z_1) - Q(z_2)^* = (z_1 - \bar{z}_2)\gamma(z_2)^+\gamma(z_1).$$

Пусть $\Omega$ то же, что в Разделе 1 и предположим, что

$$\infty \notin \Omega.$$

Пусть задана функция $\tau \in M^{n\times n}(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}})$. Для всех $z \in \mathrm{P}(\tau; \Omega)$ рассмотрим следующую "граничную задачу": для заданного $h \in \mathfrak{H}$ найти $f \in \mathcal{D}(S^+)$ такой, что

$$(S^+ - z)f = h \quad \text{и} \quad \tau(z)\Gamma_0 f + \Gamma_1 f = 0. \tag{3.4}$$

bvp

**Определение 3.1.** (см. [4, Definition 5]) Скажем, что $z \in \mathrm{P}(\tau; \Omega)$ — *регулярная точка* задачи (3.4) и запишем $z \in \rho(S^+, \Gamma, \tau)$, если для каждого $h \in \mathfrak{H}$ задача (3.4) имеет единственное решение $f \in \mathcal{D}(S^+)$. В этом случае линейное отображение $h \longmapsto f$ обозначим через $R(z)$.

По теореме о замкнутом графике $R(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ при каждом $z \in \mathrm{P}(\tau;\Omega)$.

Следующий хорошо известный результат описывает множество регулярных точек задачи (3.4) и также семейство $\{R(z)\}$ разрешающих операторов.

DM **Предложение 3.2 ([3]).** *Пусть* $\mathrm{P}(\tau;\Omega) \cap \rho(A_0) \neq \emptyset$ *и* $z_0 \in \mathrm{P}(\tau;\Omega) \cap \rho(A_0)$. *Тогда* $z_0 \in \rho(S^+,\Gamma,\tau)$ *тогда и только тогда, когда* $\det(\tau(z_0) + Q(z_0)) \neq 0$. *Это влечет открытость множества* $\rho(S^+,\Gamma,\tau) \cap \rho(A_0)$. *Если* $z \in \rho(S^+,\Gamma,\tau) \cap \rho(A_0)$, *то*

$$R(z) = (A_0 - z)^{-1} - \gamma(z)(\tau(z) + Q(z))^{-1}\gamma(\bar{z})^+. \tag{3.5}$$ Rz

Теперь положим, что функция $\tau$ локально дефинизируема в $\Omega$. Тогда из результатов Разделов 1 и 2 получаем следующую теорему.

appl **Теорема 3.3.** *Пусть* $S$ *— плотно определенный замкнутый симметрический оператор в пространстве Крейна* $\mathfrak{H}$, *имеющий самосопряженное расширение* $A'$ *и удовлетворяющий условию* (3.1). *Предположим существование такой граничной тройки* $(\mathcal{H}\Gamma_0,\Gamma_1)$ *для* $S^+$, *что самосопряженное расширение* $A_0$ *оператора* $S$, *задаваемого соотношением* $\mathcal{D}(A_0) = \ker\Gamma_0$, *удовлетворяет условию*

$$\sigma(A_0) \cap \Omega \subset \sigma_{p,norm}(A_0). \tag{3.6}$$ sOms

*Пусть* $\tau \in D^{n\times n}(\Omega)$ *и предположим существование точки* $z_0 \in \mathrm{P}(\tau;\Omega) \cap \rho(A_0)$ *регулярной для задачи* (3.4). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Множество всех невещественных точек голоморфности* $\tau$, *не являющиеся регулярными для* (3.4), *дискретно в* $\Omega \setminus \mathbb{R}$ *и в* $\Omega \cap \mathbb{R}$ *нет точек сгущения этого множества.*

(2) *Для каждой области* $\Omega'$, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, *с теми же свойствами как и* $\Omega$, *существуют такие пространство Крейна* $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot])$, *содержащее* $\mathfrak{H}$ *как подпространство Крейна, и самосопряженное линейное отношение* $B$ *в* $\mathfrak{K}$, *локально дефинизируемое в* $\Omega'$, *что имеют место следующие соотношения:*

   (*i*) $\Omega' \cap \rho(A_0) \cap \rho(S^+,\Gamma,\tau) \subset \rho(B)$;

(*ii*) *Если* $P$ *— самосопряженный проектор в* $\mathfrak{K}$ *с* $P\mathfrak{K} = \mathfrak{H}$, *то*

$$R(z) = P(B-z)^{-1}|\mathfrak{K}, \quad z \in \Omega' \cap \rho(S^+, \Gamma, \tau);$$

(*iii*) *Если* $E(\cdot, B)$ *— локальная спектральная функция для* $B$, *то для каждого интервала* $\Delta_0$, $\overline{\Delta_0} \subset \Omega' \cap \mathbb{R}$, *такого, что проектор* $E(\Delta_0, B)$ *определен,*

$$E(\Delta_0, B)\mathfrak{K} = \overline{\operatorname{span}}\{(B-z)^{-1}E(\Delta_0, B)h : h \in \mathfrak{H}, z \in \rho(B)\}; \quad (3.7) \quad \boxed{\mathtt{EK}}$$

(*iv*) *Если кроме* $\mathfrak{K}$ *и* $B$ *некоторая пара* $\widetilde{\mathfrak{K}}$, $\widetilde{B}$ *удовлетворяет тем же свойствам, что и* $\mathfrak{K}$ *и* $B$, *то для каждого* $\Delta_0$ *как в* (*iii*) *и такого, что также* $E(\Delta_0, \widetilde{B})$ *определено, существует такой плотно определенный изометрический оператор* $U$ *из* $E(\Delta_0, B)\mathfrak{K}$ *в* $E(\Delta_0, \widetilde{B})\widetilde{\mathfrak{K}}$ *с плотной областью значений, что* $U(B-\lambda)^{-1}x = (\widetilde{B}-\lambda)^{-1}Ux$ *при* $\lambda \in \rho(B) \cap \rho(\widetilde{B})$, $x \in E(\Delta_0, B)\mathfrak{K}$.

*Доказательство.* Из (3.6) следует, что функция $Q$ является мероморфной в $\Omega$. Отсюда в силу Теоремы 1.8 имеем $\tau + Q \in D^{n\times n}(\Omega))$. По предположению и по Предложению 3.2 функция $z \longmapsto \det(\tau(z) + Q(z))$ не равна тождественно нулю в $\mathrm{P}(\tau;\Omega) \cap \rho(A_0)$. Следовательно, применима Теорема 2.5 и потому $-(\tau+Q)^{-1} \in D^{n\times n}(\Omega)$. Отсюда вытекает, что невещественные нули функции $z \longmapsto \det(\tau(z) + Q(z))$, сосредоточенные в $\mathrm{P}(\tau;\Omega) \cap \rho(A_0)$, не могут иметь предельные точки во множестве $\Omega \cap \mathbb{R}$. Справедливость утверждения (1) теперь вытекает из Предложения 3.2.

Предположим $i, -i \in \Omega'$ для $\Omega'$ как в (2). Это не является ограничением. Так как в силу (3.6) функции $z \longmapsto (A_0 - z)^{-1}$ и $z \longmapsto \gamma(\overline{z})^+$ мероморфны в $\Omega$, то по Теореме 1.8 функция $R$ принадлежит $D(\Omega, \mathcal{L}(\mathfrak{H}))$ (см. (3.5). По той же теореме $z \longmapsto z + (1+z2)R(z)$ принадлежит $D(\Omega, \mathcal{L}(\mathfrak{H}))$. Тогда из [11, Theorem 3.8] следует существование таких пространства Крейна $\mathfrak{K}$, самосопряженного в $\mathfrak{K}$ локально дефинизируемого в $\Omega'$ линейного отношения $B$, оператора $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$, и ограниченного самосопряженного оператора $S$ в $\mathfrak{H}$, что имеет место (*i*) и при $z \in \Omega' \cap \rho(A_0) \cap \rho(S^+, \Gamma, \tau)$:

$$z + (1+z2)R(z) = S + \Lambda^+(z + (1+z2)(B-z)^{-1})\Lambda, \quad (3.8) \quad \boxed{\mathtt{RSI}}$$

а также имеет место (*iii*) с (3.7) замененном на

$$E(\Delta_0, B)\mathfrak{K} = \overline{\operatorname{span}}\{(B-z)^{-1}E(\Delta_0, B)\Lambda h : h \in \mathfrak{H}, z \in \rho(B)\}.$$

Если в (3.8) положить $z = i$, то получим $S = 0$ и $\Lambda^+\Lambda = I$. Поэтому $\Lambda$ — изометрия из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{K}$ и $\Lambda\Lambda^+ =: P$ — самосопряженный проектор в $\mathfrak{K}$ с $P\mathfrak{K} = \Lambda\mathfrak{H}$. Для доказательства (2) достаточно идентифицировать $\Lambda\mathfrak{H}$ с $\mathfrak{H}$ и к $(iv)$ применить [11, Theorem 3.6].

$\square$

# Список литературы


ai [1] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.: Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой, М.: Наука, 1986.

BJ [2] Behrndt, J. and P. Jonas: On compact perturbations of locally definitizable selfadjoint relations in Krein spaces, Integral Equations and Operator Theory, **52** (2005), 17–44.

De [3] Derkach, V.: On Weyl function and generalized resolvents of a hermitian operator in a Krein space, Integral Equations Operator Theory **23** (1995), 387-415.

DM [4] Derkach, V. and M. Malamud: Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps, J. Funct. Anal. **95** (1991), 1-95.

DLS [5] Dijksma, A., H. Langer, H.S.V. de Snoo: Eigenvalues and pole functions of Hamiltonian systems with eigenvalue depending boundary conditions, Math. Nachr. **161** (1993), 107-154.

GK [6] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.: Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

Jnote [7] Jonas, P.: A note on perturbations of selfadjoint operators in Krein spaces, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 43, Birkhäuser Verlag Basel 1990, 229-235.

J [8] Jonas, P.: A class of operator-valued meromorphic functions on the unit disc, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Mathematica **17** (1992), 257-284.

Jdef [9] Jonas, P.: Operator representations of definitizable functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Mathematica **25** (2000), 41-72.

J2003 [10] Jonas, P.: On locally definite operators in Krein spaces, Spectral Theory and its Appl., Ion Colojoară Anniversary Volume, Theta: Bucharest, 2003, 95–127.

JLD [11] Jonas, P.: On operator representations of locally definitizable functions, Preprint: TU Berlin, 2005, Reihe Mathematik Nr. 2005 / 20.

Koe [12] Köthe, G.: Topologische lineare Räume. I. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 107. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.

KL70 [13] Крейн М.Г., Лангер Г.К.: О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве $\Pi_\kappa$, Функц. анализ и его прил., **5** (1971), 2, 59–71; 3, 54–69.

KL77 [14] Krein, M. G. and H. Langer: Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren in Raume $\Pi_\kappa$ zusammenhängen. Math. Nachr. **77** (1977), 187–236.

KL [15] Krein, M. G. and H. Langer: Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the space $\Pi_\kappa$, Acta Sci. Math., **43** (1981), 181-205.

KL73 [16] Krein, M. G. and H. Langer: Über die $Q$-Funktion eines $\pi$-hermiteschen Operators im Raume $\Pi_\kappa$, Acta Scient. Math. **34** (1973), 191-230.

Lu [17] Luger, A.: A factorization of regular generalized Nevanlinna functions, Integral Equations and Operator Theory, **43** (2002), 326–345.

SzNK [18] Sz.-Nagy, B. and Koranyi, A.: Operatortheoretische Behandlung und Verallgemeinerung eines Problemkreises in der komplexen Funktionentheorie, Acta Math. **100** (1958), 172–202.

sh [19] Шмульян Ю.Л.: Об операторных $R$-функциях, Сиб. матем. ж., XII, **2** (1971), 442–451.